Franzbecker

Hans Joachim Burscheid & Horst Struve
Universität zu Köln

Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen

Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung

Verlag Franzbecker

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek
La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet à l‘adresse http://dnb.d-nb.de.

Hans Joachim Burscheid & Horst Struve
Universität zu Köln

Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen

Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung

ISBN 978-3-88120-844-4

Titelbild:
(1) Schule von Athen, fresco von Raffaello Sanzio (1509)
(2) Kölner Dom, Foto um 1881
(3) Vorlesung an der Universität zu Köln (2009)
(4) Gottfried Wilhelm Leibniz, Gemälde von Bernhard Christoph Francke (um 1700)

Vorwort

Die folgende Abhandlung thematisiert eine Aufgabe der Mathematikdidaktik, die derzeit von ihren Vertreterinnen und Vertretern weitgehend vernachlässigt wird. Die Didaktik der am konsequentesten formalisierten Wissenschaft bemüht sich erstaunlich wenig darum, ihr Wissen, wo dies möglich ist, präzise – auch formal – zu rekonstruieren. Dabei sind doch Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern die Vorzüge formalisierten Wissens – u. a. größere Präzision und damit bessere Durchschaubarkeit – wohl vertraut. Wir halten diese Abstinenz von präzisen Rekonstruktionen für wenig zweckmäßig und werden darlegen, daß und wie eine in der Mathematikdidaktik bislang weitgehend unbeachtete Theorieform dazu beitragen kann, Fragen der Disziplin zu explizieren und Lösungen zuzuführen, die auf Grund ihrer formalen Natur auch tradierbar sind. Die Weitergabe ihres Wissens ist eine Aufgabe, der sich die Mathematikdidaktik schon im Interesse ihres Nachwuchses nicht entziehen darf. Wenn sie auch Fragestellungen kennt, die von jeder Generation neu zu beantworten sind, so gibt es auch solche, die – relativ – zeitunabhängig beantwortet werden können. Von letzteren haben wir einige aufgegriffen. Die mathematischen Kenntnisse, auf die wir zur Behandlung der ausgewählten Themen zurückgreifen, gehen nicht über die Inhalte hinaus, die in den Grundvorlesungen vermittelt werden. Bei unseren Leserinnen und Lesern[*] setzen wir diese Kenntnisse voraus. Unsere Abhandlung richtet sich an alle an der Entwicklung von Mathematik interessierten Leser: vornehmlich an Studierende der Lehrämter, an Lehrer und Mathematikdidaktiker, aber auch an Mathematiker und an Leser mit historischen oder wissenschaftstheoretischen Interessen. Auf diesen Leserkreis haben wir den Stil des Textes abgestimmt, d. h. auf weitläufige Einführungen der behandelten Themen wird verzichtet, da ihre Kenntnis vorausgesetzt werden kann.

Der in diesem Buch dargelegte Ansatz wurde gemeinsam von den Autoren und ihrem Kollegen Werner Mellis entwickelt. Die Abhandlung beinhaltet eine systematische Begründung und Darstellung dieses Ansatzes (Kapitel I und Kapitel II) sowie seiner Ergebnisse (Kapitel III).

[*] Wie werden es im folgenden der Einfachheit halber bei dem vertrauten „Leser“ oder „Schüler“ belassen. Erst in unserer Zeit wurde offenbar erkannt, daß man die Leserschaft nach Geschlechtern unterscheiden kann. Berücksichtigt man dies sprachlich, so trägt es allerdings nicht unbedingt zur besseren Lesbarkeit eines Textes bei.

Das *erste Kapitel* vermittelt in knapper Form eine Auffassung von Mathematik, die unter Schülern vorherrschend sein dürfte, und zieht Konsequenzen für das Lernen von Mathematik.
Im *zweiten Kapitel* wird der Begriffsapparat der strukturalistischen Metatheorie vorgestellt. Es ist dies die Theorieform, die uns zur Formalisierung von sehr unterschiedlichen Inhalten der Mathematikdidaktik geeignet erscheint.
Das *dritte Kapitel* beinhaltet Rekonstruktionen von Entwicklungen mathematischer Inhalte, die zum Teil auch auf formaler Ebene präzise dargestellt werden. Entwicklung verstehen wir dabei nicht nur auf Individuen, etwa Schülerinnen und Schüler, bezogen sondern auch auf die (historische) Entwicklung mathematischer Theorien. Im ersten Abschnitt werden (mögliche) Unterrichtsinhalte aus verschiedenen Schulstufen angesprochen. Der erste Teil über die Grundbegriffe der Arithmetik bietet dem Leser die Gelegenheit, sich mit der Metatheorie des Strukturalismus vertraut zu machen; denn – so unsere Überzeugung – wenn man Neues vermitteln will, muss der Leser auch die Gelegenheit haben, es einzuüben. Deshalb haben wir uns nicht gescheut, das für die Mehrzahl der Leser vermutlich fremde Theoriegerüst an den behandelten Beispielen in aller Breite zu entwickeln, um dem Leser eine erste Vertrautheit mit der Theorieform und ihrer formalen Darstellung zu geben. Im zweiten Abschnitt ist von besonderem Interesse, daß sich die strukturalistische Metatheorie, die ursprünglich zur Darstellung empirischer Theorien entwickelt wurde, auch dazu eignet, normative Fragestellungen zu strukturieren und dem Schüler auf diesem Wege ein erstes Verständnis des Theoriebegriffs zu eröffnen. Der dritte beinhaltet eine Rekonstruktion der historischen Entwicklung zweier mathematischer Theorien, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Differential- und Integralrechnung.

Ein wesentliches Anliegen der Autoren ist es, den Wert von präzisen Rekonstruktionen mathematikdidaktischen Wissens aufzuzeigen, die teilweise auch eine formale Ebene erreichen. Dies gilt für die ersten beiden Abschnitte von Kapitel III. Leser, die zunächst auf die Erarbeitung des formalen Ansatzes verzichten möchten, sei die Lektüre der Vorbemerkungen, von Kapitel I und der beiden historischen Fallstudien zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Analysis aus Kapitel III empfohlen.
Die Ausführungen sind in unterschiedlicher Form in didaktische Lehrveranstaltungen der Autoren an der Universität zu Köln eingeflossen. Als direkter Diskussionsgegenstand für Studierende des Lehramtes für die Sekundarstufe II und als formale Darstellung der epistemologischen Basis bei der Ausbildung von Primar- und Sekundarstufenlehrern.
Die Reinschrift des Manuskriptes hat Frau Gabriele John angefertigt. Ihr gebührt unser besonderer Dank! Mit größter Sorgfalt und nie ermüdender Geduld hat sie jede Passage auch

dann noch einmal bearbeitet, wenn vorgenommene Änderungen wiederholt eingearbeitet und wieder verworfen worden waren.

Die Figuren hat Herr Marco John konstruiert. Auch ihm gilt unser herzlicher Dank.

Für inhaltliche Hinweise und Hilfen danken wir den Kollegen Jürgen Bennack (Köln), Rudolf Sträßer (Gießen) sowie Herrn Dr. Rolf Struve (Bochum).

Die Autoren hoffen, mit dem vorliegenden Werk einen Beitrag zur Grundlegung der Mathematikdidaktik zu leisten.

Köln, im Sommersemester 2009

H. J. B. H. S.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Die Aufgaben, denen sich die Mathematikdidaktik zu stellen hat, sind einmal deskriptiver Art, so etwa die Beschreibung von Schülerfehlern, das möglichst präzise Erfassen der Wissensentwicklung bei Schülern o. ä. Zum andern sind sie präskriptiver Art, wenn beispielsweise begründet empfohlen werden soll, wie ein bestimmter Unterrichtsstoff einer bestimmten Altersgruppe vermittelt werden kann. Methodologisch ist es wohl so zu sehen, daß die präskriptiven Aussagen der Mathematikdidaktik als Hypothesen abduktiver „Schlüsse“ deskriptive Aussagen (bzw. in der Regel ihre Negationen) gewährleisten sollen (wenn man präskriptive Aussagen als Hypothesen abduktiver „Schlüsse“ zuläßt). Im Anschluß an die Arbeit von Joseph D. Sneed, in der dieser eine Lösung des lange Zeit offenen Problems der theoretischen Terme angab [Sneed 1971], wurde i. w. am Münchner Lehrstuhl von Wolfgang Stegmüller der sog. Strukturalismus entwickelt, eine inzwischen weithin akzeptierte Metatheorie, die es erlaubt, Theorieteile gänzlich unterschiedlicher Gebiete mit dem gleichen Formalismus zu beschreiben – bislang u. a. bewährt in Ethik, Genetik, Physik und Psychologie. Waren es zunächst nur Theorien, die Realitätsausschnitte beschrieben und erklärten, sog. *empirische Theorien*, welche strukturalistisch dargestellt oder rekonstruiert wurden, so zeigte sich bald, daß sich die Theorieform auch zur formalen Darstellung normativer Theorien eignet, sofern deren präskriptive Sätze sich auf realitätsgebundenes menschliches Handeln beziehen. In moderner Form findet man die strukturalistische Metatheorie in [Balzer – Moulines – Sneed 1987] dargestellt. Eine weniger formale Darstellung enthält [Stegmüller 1979].

Im folgenden werden wir zeigen, daß sich der von den Strukturalisten entwickelte Formalismus auch für die Mathematikdidaktik nutzen läßt. Er kann dazu dienen, deskriptive Sätze der Mathematikdidaktik zu systematisieren wie auch den Hintergrund zu explizieren, auf dem ihre präskriptiven Aussagen fußen.

Zu den deskriptiven Sätzen gehören viele Aussagen der sog. Stoffdidaktik, etwa schülergemäße Darstellungen mathematischer Inhalte oder Aussagen über bestimmte Interpretationen mathematischer Begriffe. Die Frage liegt natürlich nahe, weshalb ausgerechnet eine Theorieform, die sich zur Darstellung naturwissenschaftlicher Theorien bewährte, zur Darstellung mathematischer Theorieteile herangezogen werden soll. Schließlich ist Mathematik keine Naturwissenschaft. Diese Auffassung ist sicherlich zutreffend, wenn man abgeschlossene Darstellungen von Mathematik und Naturwissenschaften vergleicht. Blickt man auf den arbeitenden (forschenden) Mathematiker, so verschwimmt der Unterschied zwischen ihm und seinen naturwissenschaftlichen Kollegen zunehmend. Wie der Naturwissenschaftler versucht, die Ergebnisse seiner Experimente in seine Theorie einzubinden, so bahnt sich der Mathematiker einen Weg durch eine Vielzahl von Vermutungen, Beispielen, Gegenbeispielen, um z. B. eine als richtig erachtete Aussage zu beweisen. Er kommuniziert mit seinen Kollegen, um seine Gedanken zu klären, und alle seine Beispiele, Vermutungen und Gegenbeispiele sind für ihn so real wie für den Naturwissenschaftler harte Daten, d. h. gerade die pädagogische / didaktische Intention, den Schüler aktiv am Prozeß der Entwicklung von Mathematik zu beteiligen, rückt ihn in die Nähe des Naturwissenschaftlers. Alan H. Schoenfeld hat dies schon vor Jahren überzeugend ausgeführt. Er sagt: „*…mathematics is an empirical enterprise for those who engage in it. Doing mathematics is doing science, … It's an empirical discipline, one of data and discovery*“[Schoenfeld 1989, S. 5]. Gerade der Didaktiker sollte daher interessiert sein, das mathematische Wissen, das der Schüler erwirbt, in einer Form zu beschreiben, die sich am Prozeßcharakter der Mathematik orientiert, sie somit in die Nähe der Naturwissenschaften rückt.

Der Sachlogik folgend beginnen wir mit der Behandlung deskriptiver Sätze der Mathematikdidaktik, als erstes mit schülergemäßen Interpretationen eines mathematischen Begriffs. Als einleitendes Beispiel wählen wir die Zahlaspekte, schülergemäße Auffassungen der natürlichen Zahlen. Versucht man zu präzisieren, was unter einem Zahlaspekt zu verstehen ist, so hält man sich an Formulierungen wie „eine Auffassung der natürlichen Zahlen, die eine durchgängig gleichförmige Verwendung von diesen kennzeichnet“. Natürlich ist eine solche Formulierung keine Präzisierung, die besonderen Ansprüchen genügt.

Da es sich bei den angesprochenen Verwendungen der natürlichen Zahlen um solche handelt, die dem Schüler an realen Objekten exemplifiziert werden, ist es naheliegend, jede derartige Verwendung durch eine empirische Theorie zu beschreiben. Einen Zahlaspekt zu beherrschen bedeutet dann, über die entsprechende empirische Theorie zu verfügen, genauer (mit Blick auf den Schüler): sich so zu verhalten, als verfüge man über die entsprechende empirische Theorie. Da diese eine formale Darstellung hat, kann die Frage, was es heißt, einen Zahlaspekt zu beherrschen, nun mit hinreichender Präzision beantwortet werden. Auch die (logische) Abhängigkeit der verschiedenen Aspekte wird bei einer formalen Darstellung wesentlich deutlicher (vgl. Kapitel III, 1.1). Damit soll nicht gesagt werden, daß der Wissenszuwachs des Schülers der Fachsystematik folgt oder zu folgen hätte. Aber derjenige, der eine Lernsequenz plant, sollte deren fachsystematischen Aufbau kennen, um logischen Schwierigkeiten schon im Vorfeld begegnen zu können.

Neben Fragen der begrifflichen Präzisierung gehören auch Darstellungen mathematischer Theorieteile zu den Aufgaben der Stoffdidaktik, und zwar solche Darstellungen, bei denen die Mathematik einen epistemologischen Status hat, der dem Verständnis des Schülers entspricht.

Auch hier ist der Begriff der empirischen Theorie ein geeignetes Hilfsmittel, was wir beispielhaft an Bruchrechnung und ganzen Zahlen darlegen werden (vgl. Kapitel III, 1.4 und 1.5). Man wird sehen, daß die Systematisierung des Stoffes – seine als formale Theorie gefaßte Darstellung – es ermöglicht, Punkte auszumachen, bei denen besondere Verständnisschwierigkeiten des Schülers zu erwarten sind, und die Gründe dieser Schwierigkeiten zu identifizieren.

Wenden wir uns nun der wesentlich komplexeren Frage zu, wie sich präskriptive Aussagen der Mathematikdidaktik durch deskriptive Ergebnisse absichern lassen.
Anders als bei einem Gedicht von Goethe oder einem Drama von Shakespeare, das man einer Klasse vorlegt – wenn man es denn noch tut –, besteht bei mathematischen Inhalten und auch bei denen der einen oder anderen Naturwissenschaft unter allen mit diesem Thema Befaßten Einigkeit darüber, daß der Text, den das fachliche Lehrbuch enthält, einer Bearbeitung zu unterziehen ist, bevor er im Schulbuch erscheinen kann. Die Allgemeine Didaktik spricht von *didaktischer Bearbeitung* oder *didaktischer Transformation* – wobei didaktische Transformation mitunter auch als Bezeichnung für das Ergebnis der Bearbeitung verwendet wird.
Innerhalb der Mathematikdidaktik gibt es zumindest zwei systematische Untersuchungen der didaktischen Bearbeitung von Lehrbuchwissen. Die ältere stammt von Horst Karaschewski, der den Prozeß dieser Bearbeitung strukturierte, um ihn rational nachvollziehbar zu machen [Karaschewski 1966]. Die jüngere Untersuchung führte der französische Mathematikdidaktiker Yves Chevallard durch, der aus soziologischer Perspektive den Prozeß der vielschichtigen Änderungen – er spricht von *didaktischer Transposition* – untersucht, die das wissenschaftliche Wissen erfährt, bis es in Lehrwissen als Thema des Unterrichts überführt ist [Chevallard 1991].
Obwohl die Allgemeine Didaktik, Karaschewski und Chevallard nur partiell gleichlautende Ziele verfolgen, machen ihre Untersuchungen übereinstimmend ein Defizit deutlich, das Ausgangspunkt unserer eigenen Überlegungen sein wird.
Die Allgemeine Didaktik – als Beispiel diene Oskar Seitz [Seibert-Serve 1992] – geht vom Unterricht aus und formuliert bestimmte Prinzipien, die einen *guten Unterricht* ausmachen. Dazu gehören

- *Sachgemäßheit,*
- *Schülergemäßheit,*
- *Elementarisierung.*

Unter dem Prinzip *Sachgemäßheit* findet man folgende Aussage: *„Dabei fällt der Fachdidaktik die Aufgabe zu, die Ankerpunkte zu finden, an denen das Wesentliche des Faches gelehrt werden kann: zentrale Inhalte, Methoden, Arbeitsweisen“* [ebd., S. 52].

Wie sich der Unterricht der Ergebnisse der didaktischen Bearbeitung zu bedienen hat, dazu heißt es unter dem Prinzip *Elementarisierung*:

„Zum zweiten kann sie (die Sache; die Verf.) *dem kindlichen Verstand unzugänglich sein. Dieser ist eher anschauungsgebunden. Die Konsequenz des Unterrichts ist, entweder auf diese bestimmte Sache als Unterrichtsgegenstand zu verzichten oder nur zu verstehende Aspekte von ihr, also nicht sie selbst als sie selbst, zu vermitteln, sie in für das Bewußtsein des Schülers faßbarer Form zu präsentieren: Guter Unterricht schafft so eine Reduktion / Transformation der Sache auf einen begreifbaren repräsentativen Inhalt, in dem jedoch ihr Begriff aufscheint; Aufgabe des Unterrichts ist nun,* ***am*** *Aspekt die Sache durchzunehmen, eine Stufe der Generalisierung, des Transfers, der Induktion, allgemein: der Hin- oder Rückführung auf den Begriff, vorzunehmen* [ebd., S. 74]. *... Dieses Verfahren des Unterrichts mit der Sache nennen wir* ***Elementarisierung****, ...*“ [ebd., S. 75].

Es werden dann gewisse Momente der Elementarisierung unterschieden, eines ist die *Vereinfachung*. Dazu heißt es: *„An einem einfachen, aber markanten Beispiel, dem Prototyp, wird das Bestimmende des Gegenstands aufgewiesen“* [ebd., S. 75].

Wenn es auch völlig legitim ist, normativ festzulegen, was als *guter Unterricht* gelten soll, so ist aus unserer Sicht wesentlich – da neben den zitierten auch alle weiteren Ausführungen präskriptiver Art sind –, daß an keiner Stelle die Frage gestellt wird, wie sich eine vorgenommene Elementarisierung als *Elementarisierung* – hier als Vereinfachung – ausweist. Gerhard Becker hat in einer älteren Arbeit diese Frage für den Mathematikunterricht aufgegriffen und dargelegt, daß eine Vereinfachung im vorgenannten Sinne – bei Becker heißt sie eine *Vergröberung* – durchaus bestimmte Bedingungen erfüllen muß, soll sie unterrichtlich verwendbar sein [Becker 1974]. Ohne Kriterien, die das oben Gesagte zu präzisieren suchen und die zu erfüllen sind, ist nicht überprüfbar, ob der Fachdidaktiker oder der Schulbuchautor dem Lehrer Vorlagen liefern, die den *guten Unterricht* ermöglichen; d. h. wir sehen die Schwäche in der Position der Allgemeinen Didaktik nicht darin, daß sie von fachinhaltlichen Fragen absehen muß sondern vielmehr darin, daß sie ihre Position methodologisch nicht weiter ausbildet. Formal betrachtet unterliegt es – folgt man ihr – letztlich ausschließlich der subjektiven Bewertung, ob die didaktische Bearbeitung von Fachinhalten den *guten Unterricht* ermöglicht oder nicht.

Karaschewski scheint die ihm vorliegenden Ausführungen der Allgemeinen Didaktik auch als methodologisch unbefriedigend empfunden zu haben, denn er arbeitete das Problemfeld als formale Theorie aus, führte Postulate, Definitionen, Axiome und Prinzipien ein und unterschied sorgfältig zwischen diesen. Es ist erstaunlich, daß unseres Wissens sein Ansatz in der Mathematikdidaktik nicht systematisch weiterentwickelt wurde. Doch zu seiner Theorie:

Postulate sind *„sehr allgemeine, im Grunde genommen selbstverständliche Forderungen, die für das Fragen und Forschen in der Didaktik generelle und grundlegende Anerkennung beanspruchen“* [ebd., S. 15; gekürzt d. d. Verf.]. Insgesamt führt Karaschewski neun solcher Postulate an, die dazu dienen sollen, Mängel an *„Eigenständigkeitsbewußtsein in der Didaktik“* – gegenüber Mathematik, Psychologie, Bürokratie, Autoritätshörigkeit und wissenschaftlichem Sprachfetischismus – sowie an *„sachlicher Treue und Vertrauenswürdigkeit“* [beides ebd., Inhaltsverz.] – dokumentiert durch Selbstverherrlichung, unzureichende Begründungen, Mangel an zentralem Sach- und Sinnverständnis und Widersprüchlichkeit in den eigenen Aussagen – einzuschränken.

Die **Definitionen** erfassen *„erforderliche Grundbegriffsbestimmungen, die sich schon auf den darzustellenden Lehrgang beziehen“* [ebd., S. 15; gekürzt d. d. Verf.]. Beispiele definierter Begriffe sind: Abstraktion, Tätigkeit, Dingsymbol, Begriffssymbol sowie Bild versus Figur.

Axiome beinhalten *„alle Festlegungen in Sachfragen, die für die Grundlagenbildung des Lehrgangs entscheidend sind“* [ebd., S. 15]. Die zehn von Karaschewski aufgelisteten Axiome sind somit zu verstehen als zehn selbst auferlegte Bindungen, denen der von ihm entworfene Lehrgang genügen soll. Auch hier einige Beispiele:

- *Das Axiom der Minimaleinwirkung:* Der Lehrende muß stets bestrebt sein, die Kinder mit einem Mindestmaß an direkter Einwirkung zu einem Höchstmaß an eigener Tätigkeit zu veranlassen [ebd., S. 70].
- *Das Axiom der Strukturangleichung:* Unterrichtsgegenstände mit ihren Begriffen und Begriffszusammenhängen entwickeln und verfestigen sich im Denken der Kinder nur allmählich. Dieser Entwicklungsgang wird bestimmt und begrenzt einmal durch die individuellen Voraussetzungen der Schüler, zum andern durch die von außen kommenden Entwicklungsreize [ebd., S. 76].
- *Das Axiom der thematischen Prägnanz:* Jeder Lehrgang wird *eingeleitet* durch eine wirkliche oder bildlich dargestellte komplexe Handlung. Diese muß etwas Außergewöhnliches, „auf den ersten Blick“ Interessierendes enthalten, das die Aufgabenstellung motiviert und typisiert. Eine solche arbeitsauslösende Darstellung kann daher im allgemeinen nicht „echt“ im Sinne von „alltäglich“ und „wirklich vorkommend“ sein. Die *Weiterführung* eines Lernprozesses muß unter zusätzliche Themen gestellt werden, die in einem dem ein-

leitenden Stadium analogen Sinne zwar auch „themaprägnant“ sein sollen, sich dabei aber nicht auf „Bilder“ und „Handlungen“ zu stützen brauchen [ebd., S. 103].

Prinzipien schließlich sind *„erste oder wichtigste ‚Folgesätze‘, die sich aus den Axiomen ergeben“* [ebd., S. 17; gekürzt d. d. Verf.]. So ergeben sich

aus dem Axiom der Strukturangleichung das

- *Prinzip des vorwegnehmenden Lernens:* Die unterrichtliche Behandlung aller Begriffszusammenhänge von relativ großer Komplexität und Abstraktionshöhe erfordert eine zeitliche Vorwegnahme der grundlegenden, weniger komplizierten Teile, damit für einen solchen erfahrungsgemäß schwer erfaßbaren Unterrichtsgegenstand die erforderliche Zeit gewonnen wird [ebd., S. 77],

aus dem Axiom der thematischen Prägnanz das

- *Prinzip der weiterführenden Themastellung:* Der weithin im Symbolischen fortgeführte Lernprozeß kann durch Weiterverwendung von Sachworten sowie von Vorstellungen wirksam angeregt werden, die zwar im Bildhaften gegründet sind, jetzt aber nur noch in metaphorischer Bedeutung erhalten bleiben [ebd., S. 103].

Wie insbesondere die beispielhaft angeführten Prinzipien deutlich machen, ist es Karaschewskis Anliegen, nicht nur zu zeigen, wie sich die didaktische Transformation begründen läßt, sondern er sucht darüber hinaus noch bestimmte Randbedingungen, um deren unterrichtliche Umsetzung festzuschreiben. Er liefert ein *didaktisches System*, wie er es nennt [ebd., S. 15].

In seinem Bemühen, das Erarbeiten eines didaktischen Systems zu präzisieren, geht er über das schon Gesagte hinaus, wenn er die Frage von Widerspuchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit eines *didaktischen Axiomensystems* thematisiert [ebd., S. 16]. Eine nicht der Logik entnommene Kategorie fügt er noch hinzu, die *„Praxisbezogenheit“* eines solchen Systems. Die Axiome *„sollen als Verdichtung eines umfangreichen Erfahrungswissens ... verstanden werden, so daß sich aus dem System keine für die Unterrichtspraxis offensichtlich absurde Folgerungen ergeben dürfen“* [ebd., S. 17; gekürzt d. d. Verf.].

Versucht man, Karaschewskis Ansatz kritisch zu würdigen, so kommt man zu dem Ergebnis, daß er letztlich nicht die didaktische Bearbeitung der Fachinhalte im methodologischen Sinne präzisiert hat sondern vielmehr die Begründung der Prinzipien – wobei die (üblichen) didaktischen Prinzipien durchaus unter den Begriff Prinzip in seinem Sinne subsumiert werden können –, nach denen sich die unterrichtliche Umsetzung einer solchen Bearbeitung richten kann. Eine Frage, die später von Eberhard Dahlke erneut aufgegriffen wurde [Dahlke 1981].

Einen gänzlich anderen Zugang wählt Chevallard. Er geht davon aus, daß die Gesellschaft und ihre Schule sich stets um ein Gleichgewicht bemühen, das darin zum Ausdruck kommt, daß die Gesellschaft die Schule als die ihrige akzeptiert. Wird dieses Gleichgewicht gestört – empfindet beispielsweise die Gesellschaft die Schule als elitär oder veraltet – so konzentriert sich das Bemühen um eine erneute Anpassung auf eine Veränderung des an der Schule gelehrten Wissens, des Wissenstextes (texte du savoir [Chevallard 1991, S. 35]). Chevallard verkennt nicht das Mißverhältnis zwischen diesem (lokalen) Mittel und dem gewünschten (globalen) Effekt, er betont aber, daß dieses Mittel nahezu mit Sicherheit erfolgreich sei. Natürlich läuft ein solcher Änderungsprozeß verdeckt ab, und Chevallard sieht eine wesentliche Aufgabe der Mathematikdidaktik darin, ihn offen zu legen und zu untersuchen. Denn diese Untersuchung ist Voraussetzung dafür, nach richtigen Transpositionen des Wissens suchen zu können, eine Aufgabe, welche die Notwendigkeit und Legitimität der Mathematikdidaktik als Wissenschaftsgebiet begründet [ebd., S. 48; gekürzt d. d. Verf.]. Ohne die Analyse Chevallards näher auszuführen, dürfte deutlich sein, daß seine Fragestellung entscheidend weiter greift als die Problemstellung, die die Allgemeine Didaktik und Karaschewski angehen. Diese fällt bei ihm unter die didaktische Transposition *im strengen Sinne* (transpos. did. stricto sensu [ebd., S. 39]), die die Umarbeitung von zu lehrendem Wissen (objet à enseigner) in Unterrichtswissen (objet d'enseignement) bezeichnet. Sie wird ergänzt durch die didaktische Transposition *im weiteren Sinne* (transpos. did. sensu lato [ebd., S. 39]) – der Übergang von einem Wissen im allgemeinen Sinne (objet de savoir) zu einem zu lehrenden Wissen –, die insbesondere die sehr komplexen und natürlich verdeckten Mechanismen umfaßt, die zur Auswahl eines wissenschaftlichen Inhaltes als Unterrichtsgegenstand führen (Wahl der deutschen Termini nach [Seeger e. a. 1989]).

Aus unserer Sicht wesentlich ist, daß die Aussagen Chevallards deskriptiver Art sind, was es prinzipiell ermöglichen müßte, eine Antwort auf die Frage zu finden, wie die didaktische Transposition *im strengen Sinne* begründbar ist. Er selbst gibt auf diese Frage nur eine negative Antwort, wenn er darauf verweist, daß die didaktischen Bearbeiter – Lehrplanverfasser, Schulbuchautoren, Lehrer – keine Verantwortung für die epistemologische Änderung des Unterrichtsobjektes gegenüber dem zum Unterrichten ausgewählten Objekt übernähmen [ebd., S. 45], womit gemeint ist, daß die didaktischen Bearbeiter durch ihre Entscheidungen, die häufig normativen Charakter haben, den epistemologischen Status des Unterrichtsobjektes gegenüber dem zum Unterrichten ausgewählten Objekt gewollt oder ungewollt verändern, ohne dies gegebenenfalls explizit zu machen.

Wir können somit festhalten, daß keines der herangezogenen Beispiele die Frage diskutiert, wie die didaktische Bearbeitung der Fachinhalte begründet werden kann. So selbstverständlich es ist, daß die didaktische Bearbeitung nicht mit logischer Notwendigkeit aus den Fachinhalten abgeleitet werden kann, so selbstverständlich sollte es auch sein, daß die Bewertung, ob eine didaktische Bearbeitung angemessen ist, nicht nur subjektiven Maßstäben unterliegen darf. Auch wenn dies allgemeine Zustimmung finden sollte, so zeigen die herangezogenen Beispiele, daß es offensichtlich nicht selbstverständlich ist, wie sich das Urteil objektivieren läßt.

Mathematische Inhalte – so auch die, die in den Unterricht übernommen werden sollen – liegen in der Regel als Theorien oder Theorieteile vor. Die didaktische Bearbeitung eines solchen Theorieteils nennen wir eine *didaktische Konzeption*[1]. Sie trifft eine inhaltliche Auswahl, ordnet die ausgewählten Inhalte an und gibt ihnen eine – gegebenenfalls vom Lehrbuch abweichende – Darstellung.

Die didaktische Konzeption steht – so wollen wir sie verstanden wissen – zwischen dem fachlichen Lehrbuch und dem Schulbuch. Wir könnten auch sagen: zwischen dem fachlichen Lehrbuch und dem Unterrichtsentwurf. Da Unterrichtsentwürfe aber in der Regel inhaltlich auf das Schulbuch zurückgreifen, orientieren wir uns an diesem.

Die didaktische Bearbeitung der Fachinhalte – also die didaktische Konzeption – bedarf aus unserer Sicht einer Begründung. Wir nennen diese Forderung das *Rechtfertigungsproblem* der didaktischen Konzeption. Aus der inhaltlichen Bestimmung der didaktischen Konzeption folgt notwendig, daß sie sich nur didaktisch begründen läßt. Wie läßt sich das Rechtfertigungsproblem einer didaktischen Konzeption lösen? Methodisch gleicht unser Lösungsvorschlag dem Vorgehen von Karaschewski: *„Es wäre ... von jeder Didaktik zu fordern, daß vorweg alle diejenigen* ***Vorentscheidungen*** *mitgeteilt werden, die wesenseigentümlich für den Aufbau der betreffenden Didaktik sind“* [Karaschewski 1966, S. 14]. Wie er sind wir der Auffassung, daß vorab bestimmte Forderungen – dies sind bei ihm die Postulate – zu formulieren sind, an deren Erfüllung die didaktische Konzeption zu messen ist. Abweichend von ihm zielen unsere Forderungen aber nicht auf das Wissenschaftsverständnis der Mathematikdidaktik, sondern sie orientieren sich an der Beziehung zwischen Unterrichtsinhalt und Schüler. Da wir diese als eine zentrale Beziehung für die fachdidaktische Arbeit ansehen, sprechen wir von *methodologischen Forderungen* (an die Mathematikdidaktik). Im einzelnen lauten sie:

- Es ist der Zweck anzugeben, zu dem der Schüler den neu einzuführenden Inhalt erlernen soll;
- es ist anzugeben, wie der neu einzuführende Inhalt dem genannten Zweck dienen kann;

[1] Die folgenden Ausführungen gehen auf [Burscheid, Mellis 1990] zurück.

- es sind die systematischen Voraussetzungen, auf die zurückgegriffen wird, detailliert anzugeben.

Man kann natürlich gegen diese Forderungen Vorbehalte anmelden. Man kann auch andere Forderungen für wesentlicher halten. Dies ist aus unserer Sicht nicht entscheidend. Entscheidend ist vielmehr, daß überhaupt dergleichen Forderungen formuliert werden, um zu explizieren, welchen Vorgaben die didaktische Konzeption zu genügen hat.

Die Antworten auf die methodologischen Forderungen, denen gemäß also die didaktische Konzeption zu erarbeiten ist, nennen wir ebenfalls *didaktische Postulate*. Wie die beiden ersten Forderungen zeigen, sind nach Auswahl eines mathematischen Inhaltes unterschiedliche Postulate und damit unterschiedliche didaktische Konzeptionen dieses Inhaltes möglich.

Bis zu diesem Punkt geht unsere Überlegung hinsichtlich der Begründbarkeit einer didaktischen Konzeption methodisch nicht über die Ausführungen der Allgemeinen Didaktik oder Karaschewskis hinaus. Will man dies erreichen, so ist es erforderlich, den Begriff der didaktischen Konzeption zu präzisieren. Als *didaktische Konzeption* bezeichnen wir eine Theorie der mathematischen Inhalte – also eines mathematischen Theorieteils – mit den didaktischen Postulaten als Leit- oder Konstruktionsprinzipien, die in ihren Aussagen letztere expliziert. Wenn die didaktische Konzeption einerseits den Postulaten genügen muß, andererseits sich als Theorie darstellt, so ist klar, daß man bei der Formulierung der Theorie die Postulate in Blick halten muß. Dies drücken wir mit den Worten aus: Die Postulate können als Konstruktionsprinzipien der Theorie aufgefaßt werden.

Eine didaktische Konzeption ist eine Theorie. Somit sind ihre Einzelaussagen und ihre Schlüssigkeit rational überprüfbar. Es ist also rational überprüfbar, ob die Aussagen der didaktischen Konzeption die didaktischen Postulate explizieren. Auch dann ist die Frage der Angemessenheit einer didaktischen Bearbeitung mathematischer Inhalt nicht mit logischen Mitteln entscheidbar – das war ja auch nicht zu erwarten –, aber sie unterliegt auch nicht mehr ausschließlich dem subjektiven Urteil. Didaktische Postulate und didaktische Konzeption sind sachlogisch aufeinander bezogen, wie eine mathematische Theorie und der Grundsatz, daß ihre Beweise logisch vollständig und korrekt sein müssen, einen sachlogischen Bezug haben.

Expliziert die Theorie die didaktischen Postulate, so ist das Rechtfertigungsproblem der didaktischen Konzeption gelöst, diese also begründet. Umgekehrt ist die didaktische Konzeption auch eine Rechtfertigung für die didaktischen Postulate wie in den Naturwissenschaften die Prinzipien gerechtfertigt werden durch die Folgerungen, die man aus ihnen ziehen kann.

Ist das Rechtfertigungsproblem für eine didaktische Konzeption gelöst, so erweist sich das oben von Chevallard angesprochene Problem bei der didaktischen Transposition *im strengen*

Sinne, daß die didaktischen Bearbeiter keine Verantwortung für Änderungen des epistemologischen Status der von ihnen behandelten Inhalte übernehmen, als gegenstandlos.

Wie ist es aber möglich, eine Theorie zu formulieren, die mathematische Aussagen umfaßt und die als Explikation didaktischer Postulate verstanden werden kann? Offensichtlich kann diese Theorie keine mathematische Theorie sein, denn eine solche ist – im heutigen Verständnis – ohne ontologische Bindung und kann daher keine Aussagen über Zwecke und deren Realisierung machen. Anders ist dies bei empirischen oder normativen Theorien, die Aussagen über reale Objekte oder getroffene Vereinbarungen machen, und damit über eine starke ontologische Bindung verfügen. Lassen sich also die mathematischen Aussagen in eine empirische oder normative Theorie integrieren, die sich strukturalistisch rekonstruieren läßt, so kann man die Frage stellen und auch beantworten, ob eine solche die didaktischen Postulate expliziert. Wir sehen daher in der strukturalistischen Metatheorie prinzipiell ein Mittel, eine didaktische Konzeption formal zu beschreiben, was die Überprüfung ihrer Rechtfertigung wesentlich erleichtert.

I. Auffassungen von Mathematik und vom Lernen von Mathematik

Dieses Kapitel besitzt einen einführenden Charakter. Wir versuchen, dem Leser die Grundannahmen unseres Ansatzes einsichtig zu machen. Diese formulieren wir in zwei Thesen. Die erste charakterisiert die Auffassung, die Schüler von Mathematik besitzen, den epistemologischen Status, den Mathematik in ihren Augen hat. Die zweite These charakterisiert das Lernen von Mathematik.

Beide Thesen erläutern und begründen wir anhand empirischer Arbeiten. Darüber hinaus versuchen wir, unsere Position durch die Darstellung anderer Auffassungen zu verdeutlichen. Unser Ziel ist es dabei nicht, die verschiedenen Positionen ausführlich zu diskutieren und gegeneinander abzuwägen. Die Fruchtbarkeit unseres Ansatzes soll sich nicht in der Widerlegung anderer Auffassungen zeigen, sondern in der Eignung unserer Überlegungen für die Mathematikdidaktik.

In den beiden Abschnitten dieses Kapitels werden die beiden angesprochenen Thesen entwikkelt. Im nächsten Kapitel stellen wir dann die Metatheorie des sogenannten Strukturalismus vor, mit deren Hilfe wir im folgenden mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen beschreiben werden.

1. Auffassungen von Mathematik

Auf die Frage „Was ist Mathematik?“ gibt es verschiedene Antworten. Diese hängen von den Interessen und der Blickrichtung des Antwortenden ab. Jemand der an den logisch-systematischen Grundlagen der Mathematik interessiert ist, wird eine der drei Positionen Formalismus, Intuitionismus oder Logizismus einnehmen, die im sog. Grundlagenstreit zu Beginn des letzten Jahrhunderts expliziert wurden. Ein Lehrer wird die Frage aufgrund seiner im Studium erworbenen Kenntnisse und Erfahrungen beantworten und vermutlich einen platonistischen Standpunkt vertreten, den Standpunkt, den ein Mathematiker nach Philip J. Davis und Reuben Hersh *werktags* einnimmt [Davis, Hersh 1981, S. 337], d. h. bei seiner alltäglichen Arbeit und insbesondere bei Vorlesungen[2].

Besonderheiten einer Auffassung kann man oftmals durch Abgrenzung zu anderen Auffassungen prägnanter herausarbeiten. Wir gehen deshalb im folgenden kurz auf die beiden wohl am weitesten verbreiteten Positionen ein, den Formalismus und Platonismus. (Nach einer Schätzung des Mengentheoretikers J. Donald Monk wird *„die mathematische Welt“* – und hierzu

[2] *Sonntags*, wenn sich ein Mathematiker mit Philosophie beschäftigt und die Paradoxien der Mengenlehre in seinen Blick kommen, vertritt er dann einen formalistischen Standpunkt.

zählen auch die Mathematikdidaktiker und -lehrer – *„zu 95 % von Platonisten und Formalisten bevölkert"* [Monk 1976, S. 3].) Es geht uns nicht um eine Definition der genannten beiden Auffassungen sondern lediglich um eine Beschreibung von für sie typischen Kennzeichen. Im zweiten Abschnitt stellen wir dann anhand einer empirischen Untersuchung den genannten beiden Positionen das Schülerverständnis von Mathematik gegenüber.

1.1. Heutige Auffassungen

Der Platonismus ist eine der ältesten Auffassungen von Mathematik. Ursprünglich aus der Philosophie Platons hervorgegangen, sind im Laufe der Zeit verschiedene Spielarten entwickelt worden, die mit den Namen Willard O. von Quine, Hilary Putnam und Kurt Gödel, in neuerer Zeit Penelope Maddy, verbunden sind. Charakteristisch für diese Versionen des Platonismus ist der Status der mathematischen Objekte. Diese werden in folgendem Sinne als „real" angesehen: Sie existieren unabhängig davon, ob man von ihrer Existenz weiß oder nicht. Mathematiker konstruieren also nicht ihre Gegenstände sondern entdecken sie. Zahlen, Funktionen und Figuren werden dabei nicht als in Raum und Zeit gegeben angesehen sondern existieren in einer eigenen Sphäre, dem „platonischen Himmel", sie sind „Ideen". So schreibt Gödel:

„But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition, than in sense perception... Rather they, too, may represent an aspect of objective reality ..." [Gödel 1947, S. 483 – 484].

Gödel vergleicht die mathematische Erkenntnis mit der Sinneswahrnehmung. Das Sinnesorgan eines Mathematikers ist seine Intuition. Durch diese erlangt er sozusagen Zugang zum platonischen Himmel. Intuition ist andererseits mit Abstraktion verbunden, wie in dem folgenden Zitat von Paul Bernays, ebenfalls einem überzeugten Platonisten, zum Ausdruck kommt: *„The value of platonistically inspired mathematical conceptions is that they furnish models of abstract imagination. These stand out by their simplicity and logical strength. They form representations which extrapolate from certain regions of experience ..."* [Bernays 1935, S. 259].

Während die platonistische Auffassung von Mathematik schon von griechischen Mathematikern und Philosophen in der Antike entwickelt wurde, ist die formalistische Position erst zu Anfang des letzten Jahrhunderts von David Hilbert formuliert worden. Sie entstand als eine