

# **Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik**

**Festschrift**

anlässlich des sechzigsten Geburtstages  
von  
Horst Struve

Herausgegeben von  
Michael Meyer, Eva Müller-Hill & Ingo Witzke

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen  
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet  
über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek  
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche  
Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the  
Internet at <<http://dnb.ddb.de>>.

Michael Meyer, Eva Müller-Hill, Ingo Witzke (Hrgs.)  
Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik  
Festschrift anlässlich des sechzigsten Geburtstages von Horst Struve  
ISBN 978-3-88120-827-7

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der  
Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder  
Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustim-  
mung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen  
gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie  
oder irgendein anderes Verfahren als auch für die Übertragung auf Filme,  
Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien.

---

## Vorwort

Am 05.11.2012 vollendete Horst Struve sein 60. Lebensjahr. Wir nehmen diesen Festtag als Anlass, seine bisherige, umfassende wissenschaftliche Tätigkeit mit diesem Band zu würdigen.

Horst Struves akademischer Lebenslauf ist bestimmt von seinem Streben nach einer wissenschaftlichen Grundlegung der Mathematikdidaktik vor einem ausgeprägten wissenschaftstheoretischen Hintergrund. Nach seinem Diplom in Mathematik und der anschließenden fachwissenschaftlichen Promotion bei Friedrich Bachmann an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel im Bereich der Grundlagen der Geometrie begann er seine mathematikdidaktische Laufbahn. Zunächst forschte und lehrte er als wissenschaftlicher Assistent von Bernold Picker am Seminar für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität zu Köln. Ein herausragendes Ergebnis dieser Zeit in Köln ist seine Habilitationsschrift „Grundlagen einer Geometriedidaktik“, die 1988 von der Erziehungswissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln angenommen wurde und für die kurze Zeit später der Preis zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ausgesprochen wurde.

Seinen Erstruf erhielt Horst Struve an die pädagogische Hochschule Heidelberg, worauf eine Professur an der Universität Koblenz-Landau folgte. 1996 kehrte Horst Struve an die Universität zu Köln zurück, nun als Professor für Mathematik und ihre Didaktik. Fortan prägte er maßgeblich Arbeit und Gestalt des Kölner Seminars und gründete hier unter anderem – gemeinsam und auf der Grundlage der stets engen und fruchtbaren Zusammenarbeit mit Hans-Joachim Burscheid – die bis heute fest etablierte Arbeitsgruppe zu „Rekonstruktionen mathematischen Wissens“. Diese Arbeitsgruppe beschäftigt sich mit unterschiedlichen Fragen der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung aus stets rekonstruktiven und darüber hinaus wissenschaftstheoretisch orientierten, lernpsychologischen oder historisch-systematischen Perspektiven. Dabei werden insbesondere soziologische, kognitionspsychologische und kulturhistorische Aspekte der Entwicklung von mathematischem Wissen mit Bezug auf Grundlegungs- und Vermittlungsfragen thematisiert.

Zwischen der historischen Entwicklung von mathematischen Theorien und ihrer Entwicklung im Schulunterricht, so etwa Horst Struves Überzeugung, besteht ein enger Zusammenhang: Wie im Laufe ihrer Geschichte Mathematik oft in naturwissenschaftlichen Kontexten betrachtet und betrieben wur-

de, wird sie auch heute noch im Unterricht mit Bezug auf Gegenstände und Anwendungen der realen Welt vermittelt. Charakteristika der historischen Entwicklung von Mathematik haben daher oftmals Entsprechungen in der unterrichtlichen Vermittlung und Entwicklung mathematischen Wissens. Anhand eines entsprechenden Studiums der historisch-systematischen Entwicklung wissenschaftlicher mathematischer Theorien lassen sich in der Konsequenz nicht nur sinnvolle Kandidaten für Problemstellungen auf dem Weg zur Entwicklung mathematischen Wissens im Unterricht identifizieren, sondern auch potentielle Hürden bzw. Probleme für Lernende erkennen. Die Darstellung und Rekonstruktion von Theorien stützt sich dabei wesentlich auf wissenschaftstheoretische Methoden, insbesondere solche des neuen Strukturalismus (Moulines, Balzer, Sneed, Stegmüller). Ein fundamentales Produkt von Horst Struves und Hans-Joachim Burscheids gemeinsamen Forschungen in diesem Zusammenhang ist die Arbeit „Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung“, die im Jahr 2009 veröffentlicht wurde. In diesem Buch findet der oben genannte Forschungsansatz umfassende Berücksichtigung und wird als systematische Grundlage Studierenden der Lehrämter, Fachlehrkräften und Mathematikdidaktikern zugänglich gemacht. Mit dieser Arbeit schließt sich zugleich ein weiterer Kreis: Im Jahr 1986 veröffentlichte Horst Struve gemeinsam mit Werner Mellis den Artikel „Zur wissenschaftstheoretischen Diskussion um die Mathematikdidaktik“ im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. In diesem Artikel entwickeln die Autoren Fragestellungen zur Wissenschaftlichkeit der Mathematikdidaktik. Diese Fragen prägten fortan das wissenschaftliche Forschungsinteresse von Horst Struve und durchziehen das oben genannte Buch inhaltlich wie ein roter Faden. Werner Mellis beschreibt die Intention hinter diesem speziellen Forschungsinteresse folgendermaßen:

„Horst Struve sah die Chance, mit Hilfe der analytischen Philosophie und Wissenschaftstheorie Antworten auf unsere gemeinsamen Fragen über die Wissenschaftlichkeit der Mathematikdidaktik zu finden. Ich war der Meinung, dass Wissenschaftstheorie so wie Wissenschaftsgeschichte, Post-Phänomene sind: Zunächst braucht man eine Wissenschaft, dann kann die Wissenschaftstheorie untersuchen, worin ihre Wissenschaftlichkeit besteht, und die Wissenschaftsgeschichte kann untersuchen, wie es dazu kam. Daher war ich pessimistisch, ob uns die analytische Philosophie und Wissenschaftstheorie bei unseren Fragen helfen könnte, insbesondere ob sie uns helfen könne zu entscheiden, ob und wie die Mathematik-

didaktik eine Wissenschaft sein könnte.

Horst Struve teilte zwar meine Einschätzung, aber er argumentierte überzeugend, dass wir mit den Mitteln der analytischen Philosophie und Wissenschaftstheorie doch zumindest in der Lage sein sollten, eine Reihe von Problemen und Teilfragen zu identifizieren, die zur Beantwortung unserer Fragen geklärt werden müssten.“  
(Werner Mellis, private Kommunikation)

In diesem Sinne trägt nun die hier vorliegende Festschrift den Titel „Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik“. Die Beiträge in diesem Band sind in vier Sektionen eingeteilt, die – so denken wir – ein breites Spektrum des umfassenden Wirkungsfeldes und Interessensgebietes von Horst Struve widerspiegeln. Ebenso wie seine Arbeitsfelder sind die einzelnen Sektionen nicht überschneidungsfrei, sondern sollen nur eine grobe Orientierung bieten.

In der ersten Sektion werden „Wissenschaftliches Selbstverständnis, wissenschaftstheoretische und methodologische Perspektiven der Mathematikdidaktik“ thematisiert. Es handelt sich um einen Bereich, der bei den Analysen von Horst Struve grundlegend ist. Die Sektion beginnt mit einem Beitrag von Hans Joachim Burscheid. Der Autor vergleicht die auch von Horst Struve eingenommene wissenschaftstheoretisch orientierte mathematikdidaktische Position mit einer anderen Forschungsrichtung, der didaktisch orientierten Sachanalyse elementarmathematischer Inhalte. Ein solcher Vergleich wird auch im zweiten Beitrag von Heinz Griesel am Beispiel des Messens durchgeführt. Bernhard Picker untersucht im dritten, diese Sektion abschließenden Beitrag die dialektische Entwicklung der Didaktik der Arithmetik.

Einen wesentlichen Teil des zentralen Forschungsgegenstandes von Horst Struves Arbeit, der Entwicklung mathematischer Theorien, stellt die Begriffsbildung, also Entwicklung, Vermittlung und Erwerb mathematischer Begriffe dar. Im ersten Beitrag zur zweiten Sektion „Theorieentwicklung und Begriffsbildung“ beschreibt Michael Meyer einen Ansatz zur Bildung mathematischer Begriffe über Prozesse des Entdeckens und Begründens. Am Beispiel des Begriffs „Flächeninhalt“ thematisieren Michael und Johanna Neubrand im zweiten Sektionbeitrag spezifische professionelle Kompetenzen von Mathematiklehrenden im Bereich der Begriffsbildung im Unterricht. Im dritten Beitrag analysiert Esther Ramharter eine Episode zur historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeits- und Entscheidungstheorie. Katrin Reimann und

Ingo Witzke, deren Arbeit in direkter Linie von Horst Struve als ihrem gemeinsamen Doktorvater geprägt wurde, thematisieren in ihrem Artikel die „vollständige Anleitung zur Algebra“ von Leonhard Euler im Kontext einer empirischen Auffassung von Mathematik. Die Sektion wird abgeschlossen durch einem Beitrag von Hans-Georg Weigand, der die historische Entwicklung des Grenzwertbegriffs auf erkenntnistheoretischer Ebene diskutiert.

Die dritte Sektion trägt den Titel „Sprache und Semiotik“ und besteht aus insgesamt fünf Beiträgen. Im ersten Beitrag diskutiert Willi Dörfler das Verhältnis vom Operieren mit Zeichen und der Bedeutung dieser Zeichen. Anschließend identifiziert Eva Müller-Hill ein mögliches Problem des Geometrieunterrichts bei der Verwendung von geometrisch-zeichnerischen Darstellungen, insbesondere beim Übergang von deren propädeutischer zur abstrakt-regelhafter, diagrammatischer Verwendung. Im dritten Beitrag „Zur Diagnose des Invarianzbegriffes im Kindergarten“ sensibilisieren Simeon Schlicht und Ingo Witzke für die Komplexität mathematischer Begriffsbildung im Vorschulalter, wobei entsprechend des rekonstruktiven Forschungsansatzes nach Horst Struve das Verhalten von Kindern im Sinne von Theoriebildungsprozessen beschrieben wird. Hermann Rodenhausen schlägt im vierten Beitrag eine wissenschaftstheoretisch fundierte semantische Analyse mathematischer Aufgaben- und Problemstellungen vor. Die dritte Sektion abschließend verwendet Siegbert Schmidt die Sprachspielphilosophie Wittgensteins zur Analyse mathematischer Handlungen von Lernenden.

Die große thematische Bandbreite der eigenen Tätigkeit und die Vielfalt der Interessen von Horst Struve wird insbesondere durch die abschließende, vierte Sektion deutlich. Stefan Deschauer teilt mit Horst Struve die Freude an der didaktischen Erschließung historischer Texte und öffnet dazu eine spätbyzantinische „Schatztruhe“. Im allgemeinen Kontext der Genese wissenschaftlicher Theorien, der über die mathematikdidaktische Bedeutung der für Horst Struve zentralen Forschungsinteressen hinausweist, thematisiert Christiane Reiners in ihrem Beitrag das Lehren und Lernen der Natur der Naturwissenschaften am Beispiel der Chemie. Die rege fachmathematische Forschung von Horst Struve spiegelt sich schließlich wider in dem Beitrag seines Bruders Rolf Struve zum Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, der zugleich die Festschrift abschließt.

Diese Festschrift hätte nicht ohne den Einsatz der vielen Autorinnen und Autoren entstehen können, denen wir an dieser Stelle unseren herzlichen Dank aussprechen möchten. Einige der Beiträge sind in direkter Linie mit dem um-

fassenden Werk von Horst Struve verbunden, andere wiederum stellen Arbeiten langjähriger Weggefährten von ihm dar. Das Produkt ist nach unserem Ermessen ein Buch geworden, das sich durch eine breite Auffassung dessen auszeichnet, was Mathematikdidaktik ist bzw. sein kann. Zuletzt, aber nicht weniger bedeutend, möchten wir all den Korrekturleserinnen und -lesern danken, die uns bei der Fertigstellung des Buches geholfen haben. Hierbei ist insbesondere Simeon Schlicht hervorzuheben, der viel Energie in die finale Erstellung dieser Festschrift investiert hat.

Dir, Horst, wünschen wir viel Freude bei der Lektüre. Möge sie Dir Anlass und Inspiration geben, noch viele Jahre weiter zu forschen.

Köln, im Juni 2013

Michael Meyer, Eva Müller-Hill, Ingo Witzke

# Inhaltsverzeichnis

## *Sektion I – Wissenschaftliches Selbstverständnis, wissenschaftstheoretische und methodologische Perspektiven der Mathematikdidaktik*

- H. J. Burscheid* – Didaktisch relevante Begründungen elementarmathematischer Inhalte ..... 3
- H. Griesel* – Wissenschaftstheorie im Einsatz bei didaktisch orientierten Sachanalysen ..... 19
- B. Picker* – Die dialektische Entwicklung der Didaktik der Arithmetik ... 35

## *Sektion II – Theorieentwicklung und Begriffsbildung*

- M. Meyer* – Begriffsbildung durch Entdecken und Begründen ..... 57
- M. Neubrand & J. Neubrand* – Skizzen zum Lehrerwissen über den Begriff Flächeninhalt (eines Rechtecks) ..... 89
- E. Ramharter* – Alles oder dreimal alles? Pascals Wette in historisch-wissenschaftstheoretischem Kontext ..... 101
- K. Reimann & I. Witzke* – Eulers Zahlauffassung in der „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ ..... 125
- H. Weigand* – Die Entwicklung des Grenzwertbegriffs. Ein Beispiel für die Wechselbeziehung von Intuition und Strenge ..... 145

## *Sektion III – Sprache und Semiotik*

- W. Dörfler* – Bedeutung und das Operieren mit Zeichen ..... 165
- E. Müller-Hill* – Empirische Auffassungen von Geometrie im Mathematikunterricht unter dem Blickwinkel der Semiotik ..... 183
- S. Schlicht & I. Witzke* – Zur Problematik der Diagnose des Invarianzbegriffes im Kindergarten ..... 205
- H. Rodenhausen* – Empirische Interpretationsansätze im Rahmen einer methodologischen Analyse mathematischer Frage- und Problemstellungen ..... 233
- S. Schmidt* – Vom Rechnen zu ersten Erfahrungen im elementar-algebraischen Denken. Grundschulkindern unterwegs zu neuen Sprachspielen ..... 255



*Sektion IV – Historische, interdisziplinäre und fachwissenschaftliche Perspektiven*

<i>S. Deschauer</i> – Ein Glanzpunkt und eine Kuriosität aus einer spätbyzantinischen „Schatztruhe“, dem Cod. Vind. phil. gr. 65 aus dem Jahre 1436 .....	275
<i>C. Reiners</i> – Die Natur der Naturwissenschaften lernen zu lehren. Zum Potential eines expliziten Ansatzes .....	293
<i>R. Struve</i> – Anordnung im Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.....	315

# Sektion I

Wissenschaftliches Selbstverständnis, wissenschaftstheoretische und methodologische Perspektiven der Mathematikdidaktik

---

# Didaktisch relevante Begründungen elementarmathematischer Inhalte

von

**Hans Joachim Burscheid, Köln**

**Kurzfassung:** Die stark von Heinz Griesel geprägte *didaktisch orientierte Sachanalyse* als spezielle Bearbeitung elementarmathematischer Inhalte und die maßgeblich von Horst Struve mitentwickelte Konzeption, diese in empirische Theorien einzubinden, werden am Beispiel der Bruchrechnung einander gegenübergestellt. Es wird gefragt, in welcher Hinsicht sich die beiden Vorgehensweisen unterscheiden.

Die Mathematikdidaktik in Deutschland war von jeher stark auf Unterrichtsinhalte fixiert. Historisch ist dies bedingt durch die führende Rolle der Gymnasialdidaktik. In der Ausbildung der Gymnasiallehrer hatte die formal korrekte Behandlung der mathematischen Inhalte stets einen hohen Stellenwert. Diese Sichtweise von Mathematik und des Umgangs mit ihr übernahmen die Lehrer<sup>1</sup> für ihren Unterricht. Mathematik wurde vermittelt als intersubjektives und formal präzise beschreibbares Wissen.

Das Bemühen um Präzisierung war sicherlich auch ein Motiv bei der Ausarbeitung der sog. *didaktisch orientierten Sachanalysen*, vornehmlich mit den Namen Arnold Kirsch und Heinz Griesel verbunden – aber auch von Günter Pickert, Hans – Georg Steiner, Hans – Joachim Vollrath, Hans Wäsche und einer Reihe weiterer Kollegen erstellt –, die Ende der 60er und dann in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts vorgelegt wurden (vgl. [Griesel 1972]). Sie führten zu einem wesentlich besseren Verständnis elementarmathematischer Inhalte, weil sie diese, die bislang betont regelhaft im Unterricht vermittelt wurden, mit dem Begriffssystem der Strukturmathematik als lokale mathematische Theorieteile darstellten und damit den Blick von der einzelnen Regel auf den Zusammenhang lenkten, in dem sie steht. Die Autoren der Analysen orientierten sich am alltäglichen Gebrauch der mathematischen Inhalte und lehnten ihre Fassungen bewusst an diesen an. Beispiele sind das Operatormodell für Brüche, spezielle Abbildungen zwischen Größenbereichen zum Verständnis von Proportionalität und Antiproportionalität oder die Analyse von

---

<sup>1</sup>und natürlich auch die Lehrerinnen