Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.)

# Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen

# Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht

Vorträge auf der 32. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 11. bis 13. September 2015
und auf der 33. Herbsttagung
vom 09. bis 11. September 2016
in Saarbrücken

1. Auflage August 2017
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker
Hildesheim



ISBN 978-3-88120-610-5

Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.)

Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen

Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht

Vorträge auf der 32. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 11. bis 13. September 2015
und auf der 33. Herbsttagung
vom 09. bis 11. September 2016
in Saarbrücken

Die Abbildung auf der Titelseite entstammt dem Beitrag
*Rolf Bänziger*
*Geometrisches Praktikum: Die Erfolgsgeschichte eines Faches*
In diesem Band Seite 118.

www.franzbecker.de

# Inhaltsverzeichnis

# Editorial

**Andreas Filler, Anselm Lambert**

Der vorliegende Doppel-Tagungsband enthält Beiträge der Herbsttagungen 2015 und 2016 des Arbeitskreises Geometrie in der GDM, die unter den übergeordneten Themen *Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen* (2015) sowie *Konkrete Lernsituationen für den Geometrieunterricht* (2016) standen. Den engen Zusammenhang zwischen beiden Tagungsthemen zeigen viele der Beiträge in diesem Tagungsband auf.

Den Hauptvortrag *Between situations and proof* auf der Herbsttagung 2015 hielt *Aad Goddijn*. Sein Beitrag zeigt unterrichtlich erprobte Wege auf, ausgehend von praktischen Anwendungen, „materiellen Konstruktionen" (wie dem Bau eines Papierdrachens) und Phänomenen (wie der Perspektive in Fotos) geometrisch zu argumentieren, Beweise zu motivieren sowie – ausgehend von der „Sprache der Anwendungen" – geometrische Begriffe zu entwickeln.

Der Beitrag von *Heiko Etzold* befasst sich mit Facetten des Winkelbegriffs. Ausgehend von einem Abstraktionsmodell analysiert er einen Zugang zu diesem Begriff unter der Fragestellung, welche Informationen benötigt werden, um eine Winkelsituation zu beschreiben.

Vom Phänomen des rechten Winkels bzw. des Senkrechtstehens in der Umwelt sowie von etymologische Betrachtungen zum Wortfeld „senkrecht" ausgehend entwickelt *Günter Graumann* mathematische Charakterisierungen von „senkrecht zu" und strukturelle Aspekte der Orthogonalität.

*Swetlana Nordheimer* und *Tina Obermüller* thematisieren im Kontext sonderpädagogischer Förderung die Gewinnung mathematischer Erkenntnisse im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft an einem Förderzentrum. Die Autorinnen beschreiben, wie die beteiligten Schülerinnen und Schüler durch Untersuchung konkreter Pyramiden- und Prismenmodelle und die strukturierte Dokumentation ihrer Ergebnisse Regelmäßigkeiten erkennen, die zumindest ansatzweise zur Aussage des Eulerschen Polyedersatzes führen.

Ein Faltspiel und ein Spiel mit rechten Winkelhaken führen zu einem „namenlosen" symmetrischen Phänomen, dessen sich *Hans Walser* annimmt. Beide „Spiele" führen zu invarianten Teilverhältnissen, wobei Verwandtschaften zu den Strahlensätzen sichtbar werden.

Den Hauptvortrag auf der Herbsttagung 2016 hielten *Rolf Bänziger* und *Edmond Jurczek* zu dem Unterrichtsfach „Geometrisches Praktikum“, das sie an der Kantonsschule Zug (Schweiz) entwickelt haben und das im 7. Schuljahr unterrichtet wird. In unterschiedlichen Modulen haben die Lernenden Zeit, zu experimentieren, selbst Entdeckungen zu machen und sich vertieft mit Themen auseinanderzusetzen. *Rolf Bänziger* beschreibt Module des Faches (Zeichnen im Punktgitter, Würfelschnitte, Platonische Körper, Schlauchfiguren sowie Fadenkunst und Bézierkurven) und zieht eine Bilanz nach 10 Jahren, in denen das Fach unterrichtet wird. *Edmond Jurczek* entwickelt Überlegungen zur zukünftigen Ausrichtung des Faches.

*Manfred Schmelzer* regt in seinem Beitrag an, geometrischen Visualisierungen algebraischer Sachverhalte (u. a. Lösungsformel für quadratische Gleichungen, Skalarprodukt, Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme) größere Bedeutung zuzumessen und Zusammenhänge zu geometrischen Sätzen (Satzgruppe des Pythagoras, Kosinussatz) herzustellen.

Analog zum Reuleaux-Dreieck, das sich in verschiedenen Positionen in ein Quadrat einpassen lässt, gibt es Reuleaux-Zweiecke, die sich in ein gleichseitiges Dreieck einpassen lassen. Mit diesen befasst sich *Hans Walser* in seinem Beitrag von 2016. Ein wichtiger Aspekt dabei ist die Beschreibung von Kurven in verschiedenen zueinander bewegten Referenzsystemen.

*Christoph Hammer* zeigt an Beispielen zum Flächeninhalt auf, wie das Prinzip der Messung Vernetzungen erlaubt, die zum Verständnis grundlegender geometrischer Strukturen beitragen können.

Gegenstand des Beitrags von *Susanne Wöller* ist die kindliche Annäherung an die Begriffe Würfel und Quader. Kinder konstruieren aus vorgegebenem Material unter Einbeziehung sprachlicher Äußerungen Würfel- und Quaderbauwerke. Ein Schwerpunkt liegt darin, Entwicklungstendenzen des geometrischen Begriffsverständnisses 8- bis 11-Jähriger nachzuzeichnen.

*Katharina Wilhelm* befasst sich mit der Förderung mathematischen Problemlösens in der Sekundarstufe I. Sie beschreibt dazu (nach Darlegung einiger theoretischer Grundlagen) einen Unterrichtsversuch zum Problemlösenlernen im Mathematikunterricht anhand geometrischer Denkaufgaben („Eigenmann-Aufgaben“), wobei sie einen Schwerpunkt auf die Explizierung von Heurismen legte. Den Unterrichtsversuch führte sie in Form von Stationenarbeit durch. Die von ihr dazu entwickelten Arbeitsblätter sind als Kopiervorlagen im Anhang des Beitrags enthalten.

# Between situations and proof

**Aad Goddijn**

Abstract. There is seldom a unique road from a daily life situation or natural phenomenon to one specific mathematical concept, structure or technique. In a situation which was not experienced as educational, a seemingly simple problem (finding the midpoint of a wooden slat) evoked various methods while a traditional school approach was absent. In this contribution to the conference, we start wondering about this diversity, at the same time illustrating fundamental differences between the analytic and synthetic methods in geometry.
In this contribution I report on two areas of geometric activity where students worked from the start in an explorative way on problems which were part of the core of the subjects themselves; the students did not have to wait until an introduction was over, because there was no introduction. They jumped in *in medias res*. There were different educational situations (and hidden goals) in the two cases and I will reflect on the differences in phenomenon-structure relations in both with the aid of the analysis-synthesis distinction.
Examples are taken from past projects of the Freudenthal Institute, in which the author was involved as an educational designer since 1977. This contribution will stick to the designer's view; that means: a lot of examples of students' tasks, their situation in a curriculum, ideas and interpretations, and a personal retrospective.

## How to find midpoints when building kites

Every April, all my sisters and brothers, me, their partners for life, their children and grandchildren meet at our annual family day. Last year the activities focused on the kids. The younger ones (0-5) made music together with some parents and grandparents, the rest (6-12), also with adult company, built kites. In the afternoon we were all outdoors flying the kites.

I brought materials and a skeleton of the classical kite; see fig. 1, a. During the work, the midpoint of the cross-slat has to be found, of course. There was some spontaneous variety in methods to do this. Making kites is experiencing math without knowing it, an ideal situation; I observed things rather biased of course, knowing that mathematics was certainly there.

The presence of a few tape measures led to the standard method, as seen in fig. 1, b. Their scarcity provoked other methods. Because we are now studying relations between situations and mathematical structures, it is interesting to see how the various methods worked out in detail.

The standard method (see fig. 1, b) to find the midpoint looks simple, but is a multistep process in reality: apply measuring tape to the slat, read off the number at the end of the slat, divide this number by two, find the resulting number on the tape, mark the slat at the found spot.

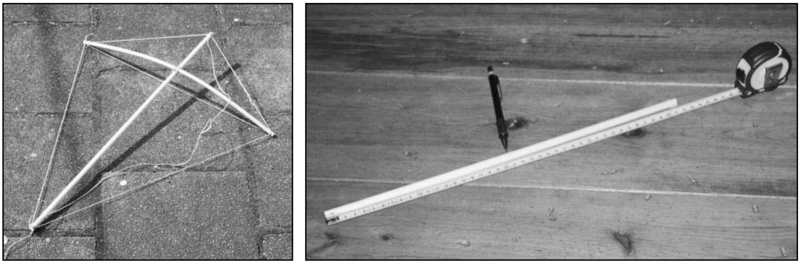

**Fig. 1:** **a.** Skeleton of a kite. **b.** finding a midpoint by the standard method.

This is, in a nutshell, the method of analytical geometry. Using lengths, we brought the geometrical situation over to ‘number land’. Then some algebra was applied, here restricted to one single division. The result of the algebra was translated back to the geometric situation of the slat itself. Midpoint found, problem solved!

Other methods of finding the midpoint of the slat were used, escaping measuring in a numerical sense; for instance folding a piece of paper or string with the length of the beam. Those means were at hand on the table during the kite making. Let us appreciate that those methods have less mathematical waste than the analytical one, because the midpoint is the only thing we were looking for and not the length of the beam or the half of it!

Anna (7) did not know yet how to apply the analytic, or any other, method to find midpoints. Her grandmother asked me for help, of course driving her brother to show how he would handle the situation. I suggested to Anna: “Put a mark roughly where you think the midpoint should be.” She did as in fig. 2, top.

I shifted the slat a bit to the end of the table and marked the proposed mid-point on the table also (center) and said: ”Let‘s check” We gave the slat a half turn (bottom). Ah, it was not right. “Take another guess!” So she did, midway between the two marks. Her kite took to the air perfectly later in the afternoon. It is pure pleasure for kids to see their self-made kites perform this wonder even if this little gem of midpoint geometry will soon be forgotten, and maybe be rediscovered later.

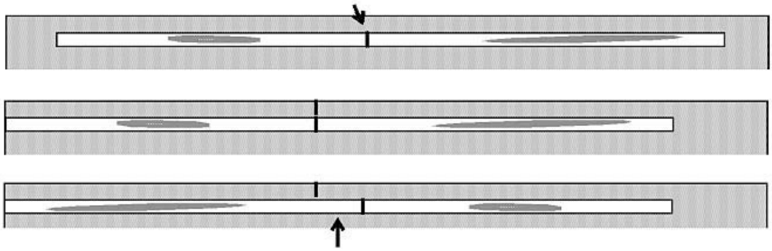

**Fig. 2:** Finding a midpoint by repeated approximation.

As Anna's last mark is also still a guess, she applied an approximation method. But don't forget: it's often the only tool we have in applications of mathematics when exact algebraic methods (or we ourselves) fail.

*The classical midpoint method was absent at the party*

A once famous method, which survived centuries of geometry education, was not used during the party with the kites: the construction with ruler and compass only.

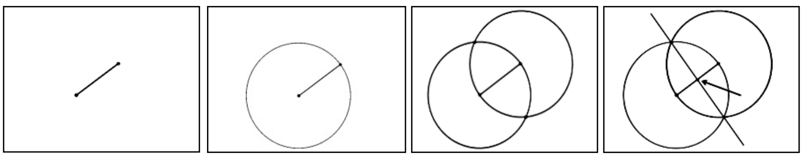

**Fig. 3:** Creating the midpoint of segment by ruler and compass only.

While the previously mentioned approach (with measuring tape) rests on the firm belief that the midpoint exists and we only have to locate it, the ruler and compass method goes for *constructing a new point*, for which we still have to show by clever argumentation that it is indeed the sought-after midpoint.

The geometric world of Euclid's *The Elements* stands on its own feet. Its constructions start with something given, in this case two points. New points can enter the stage only when constructed by strict rules, where nothing else is allowed than earlier constructed points to determine new circles and lines. What not is constructed, simply does not exist.

This style of geometry has a strong philosophical flavor; it is a way to rebuild the world from scratch by the mind only, starting off from a minimal base of axioms, which were supposed to be self-evident truths. *The Elements* works only with those accepted truths and the defined properties of circle and line. Ruler and compass, the tools of the earth measurer and the smith, are not mentioned at all in the original text. They are the materialization of the concepts of line and length, but the 'real' mathematical objects are in an ideal world of their own, accessible only by the mind. Of course ruler and compass were probably allowed as a practical tool to realize the geometrical drawings on the sand table or papyrus. This geometry is often seen as the summit of pureness in mathematics and as the ideal model of deductive science. In remote corners of our modern schools, the old belief in the formative values of this geometry can still – sometimes – be heard.

From the viewpoint of a kite-maker, the second step of the Euclidean construction in fig. 3 is quite weird, to say the least. Do we really need this strange large circle in the first step? And how did somebody find out that this step is going in the right direction? This hits the weak spot of the method in school geometry: it can be extremely difficult to find a synthetic solution for a given problem – that is: a bottom up construction – out of nothing. We all know what students often say, when forced to *find* a construction or proof: I don't know how to start.

*Comparing the analytical and synthetic methods; Descartes*

The analytic method in geometry is supposed to circumvent this problem. The basic difference between the analytic and the synthetic method is, that the analytic method supposes that the solution of a problem exists and that we just have to find it, while the synthetic method does not presuppose existence, but *creates* the solution itself. The analytic method tries to find a way down towards known terrain by looking back from the supposed end result; when this is successful, it is clear that working in the other direction leads to the wanted solution of the problem.

In his *La Géométrie*, part of *Discours de la Méthode* (1637), Descartes refers to 'Les Anciens' (the old Greeks) and mentions Pappos explicitly, who described this method to find proofs and constructions as *analysis* in contrast to *synthesis*. Descartes starts with the remark: take the problem for solved and make a drawing. Then he adds the tools of algebra to Pappos'