

Andreas Filler,
Anselm Lambert (Hrsg.)

Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen Raumgeometrie

Vorträge auf der 31. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 12. bis 14. September 2014 in Saarbrücken

Andreas Filler, Anselm Lambert (Hrsg.):
Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen
Raumgeometrie
AK Geometrie 2014

ISBN 978-3-88120-590-0

© 2015 by Franzbecker, Hildesheim

Inhaltsverzeichnis

Editorial	1
Günter Maresch <i>Raumvorstellungsvermögen: Beiträge des Geometrieunterrichts und Genauigkeit der Richtungsanzeige</i>	3
Katharina Gaab <i>Raumgeometrie in der Sekundarstufe I – Basics? Eine aktuelle Aufgabenschau</i>	33
Günter Graumann <i>Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie. Aspekte zur Förderung der Vorstellung im Raum</i>	57
Hans-Jürgen Elschenbroich <i>Anmerkungen zum Aufbau eines dynamischen Grundverständnisses von Symmetrie und Spiegelungen</i>	71
Stephan Berendonk, Marc Sauerwein, Ysette Weiss-Pidstrygach <i>Stempeln mit platonischen Körpern. Vom Raum in die Ebene und zurück</i>	85
Hans Walser <i>DIN-Format und Raum</i>	105
Autorenverzeichnis	121

Editorial

Andreas Filler, Anselm Lambert

„Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen“ ist ein längerfristiges Leitthema des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Bei der Herbsttagung 2014 wurden unter dieser Perspektive vor allem Inhalte der Raumgeometrie diskutiert, wobei Aufgaben zur Körpergeometrie, die Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens sowie natürlich auch Beziehungen und Analogien zwischen der Geometrie der Ebene und der des Raumes (u. a. bezogen auf geometrische Abbildungen) im Mittelpunkt des Interesses standen.

Den Hauptvortrag der Herbsttagung hielt *Günter Maresch* aus Salzburg zu möglichen erfolgreichen Beiträgen des Geometrieunterrichts zur Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens. Er beschreibt das Projekt *GeodiKon*, in dessen Rahmen untersucht wird, inwieweit eine umfassende und ausgewogene Schulung der Faktoren der Raumvorstellung und eine Bewusstmachung der unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien von Raumvorstellungsaufgaben zu einem besseren Raumvorstellungsvermögen führt. Dabei geht er u. a. auf Strategiepaare zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben und auf Raumvorstellungstests ein.

Einen Überblick über die Berücksichtigung elementarer Raumgeometrie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I (insbesondere der Hauptschule bzw. vergleichbarer Schulformen) gibt *Katharina Gaab*. Sie stellt fest, dass die Raumgeometrie sowohl in den Vorgaben der Bildungsstandards als auch in der Schulwirklichkeit nicht hinreichend berücksichtigt wird und erhärtet dies u. a. durch Anforderungen und Aufgaben in der Berufsausbildung. Abschließend stellt sie Ansätze vor, die bestehende Lücke zwischen schulischen Inhalten und beruflichen Anforderungen im Bereich der Raumgeometrie zu schließen.

Im Zentrum des Beitrags von *Günter Graumann* stehen Analogien zwischen ebener und räumlicher Geometrie. Er behandelt analoge Begriffe, Aufgabenstellungen und Sätze zu den Themen gerade Linien und ebene Flächen, senkrecht und parallel, Kongruenzabbildungen und Symmetrie, Dreiecke und Dreieckspyramiden, Haus der Parallelogramme und Parallelepipede, Kreis und Kugel sowie regelmäßige Vielecke und Platonische Körper.

Geometrische Abbildungen in der Ebene und im Raum bilden den Schwerpunkt der beiden folgenden Beiträge. *Hans-Jürgen Elschenbroich* zeigt anhand von Schulbuch-Beispielen auf, wie Fehlvorstellungen zur Symmetrie durch die begriffliche Vermischung von Abbildung und Symmetrie erzeugt werden. Weiterhin geht er auf Probleme ein, die damit zusammenhängen, dass Ebenenspiegelungen im Raum als Beispiele bzw. Veranschaulichungen für Geradenspiegelungen in der Ebene genutzt werden, ohne auf Analogien und Unterschiede einzugehen.

Mit Bewegungen der Ebene und des Raumes befasst sich der Beitrag von *Stephan Berendonk*, *Marc Sauerwein* und *Ysette Weiss-Pidstrygach*. Nach einer Diskussion von Problemen bei der Behandlung geometrischer Abbildungen in der Schule und auch in der Lehramtsausbildung befassen sich die Autoren mit Kippspuren platonischer Körper als einem Zugang, um ebene und räumliche Phänomene beziehungsreich darzustellen. Damit verbundene Ziele sind u. a. die Erkundung der Ebene und des Raumes durch eine einfache Bewegung (Kippen) und deren Spuren sowie die handlungsorientierte Betrachtung der Kompositionen von Bewegungen bis hin zu strukturellen Überlegungen.

Dass hinter dem DIN-Format interessante Mathematik steckt, ist allgemein bekannt. Aber was hat dieses Papierformat mit dem Raum zu tun? Der Beitrag von *Hans Walser* beantwortet diese Frage ausführlich. Ausgehend von didaktischen und erkenntnistheoretischen Problemen der Raumgeometrie stellt er zunächst einige Modelle von Polyedern vor, welche aus Papier im DIN-Format hergestellt werden können. Anschließend wird die Grundidee des DIN-Formats auf andere Figuren und auch auf Körper übertragen, wobei nicht nur der dreidimensionale Raum eine Rolle spielt.

Raumvorstellungsvermögen: Beiträge des Geometrieunterrichts und Genauigkeit der Richtungsanzeige

Günter Maresch

Zusammenfassung. Der Beitrag erörtert zwei spezielle Ergebnisse der Analysen des Forschungsprojekts GeodiKon. Im Rahmen des Projekts, an dem 903 SchülerInnen teilnahmen, wurde untersucht, ob eine umfassende und ausgewogene Schulung der Faktoren der Raumvorstellung und eine Bewusstmachung der unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien von Raumvorstellungsaufgaben zu einem besseren Raumvorstellungsvermögen bzw. zu einer besseren Lösekompetenz von Raumvorstellungsaufgaben führt. Die Resultate in Bezug auf die Abhängigkeiten der Genauigkeit der Richtungsanzeige beim räumlichen Orientierungstest Spatial Orientation Test und Befunde zu Effekten des Geometrieunterrichts in Bezug auf die Förderung des Raumvorstellungsvermögens werden diskutiert.

Einführung

Vor knapp mehr als 100 Jahren wurde der Begriff des Raumvorstellungsvermögens als eine der grundlegenden Teile menschlicher Intelligenz erkannt und in entsprechenden Intelligenzmodellen ausgewiesen (unter anderem von Spearman, 1904; El Koussy, 1935; Thurstone, 1938). In einem weiteren Schritt wurde diese Intelligenzfacette eingehender erforscht, wobei das Identifizieren der konstituierenden Faktoren der Raumintelligenz und damit verbunden das Etablieren von strukturierten Modellen des Raumvorstellungsvermögens das Ziel zahlreicher Untersuchungen war (Cattell, 1963; El Koussy, 1935; Gardner, 1991; Guilford, 1967; Maier, 1994; Thurstone, 1950; Vernon, 1961). Weiterführende Forschungsarbeiten zeigten, dass die Raumintelligenz nicht alleine durch genetische Vererbung in ihrem Umfang und Potential fundiert und schließlich beschränkt ist, sondern dass diese Intelligenzfacette durch gezielte Förderung und ausgewogenes Training verbessert werden kann (Glück u. Vitouch, 2008; Glück et al, 2005). Nun ist es – nicht zuletzt wegen des Wissens der Trainierbarkeit des Raumvorstellungsvermögens – eines der zentralen Anliegen des Geometrieunterrichts Raumvorstellung zu fördern und das Raumvorstellungsvermögen der Lernenden zu verbessern. Der jeweils gültige Lehrplan stellt zu meist das zentrale Instrument für die Vorbereitung des Unterrichts dar. Das Kompetenzmodell für Geometrisches Zeichnen (Mick et al., o.J.), Darstellende Geometrie (Kraker et al., 2012), Mathematik (4. und 8. Schulstufe:

Bifie, o.J.; 12. Schulstufe: Liebscher, et al., 2013) und oftmals auch die vorliegenden Schulbücher bestimmen ebenfalls die inhaltliche Unterrichtsplanung zu einem maßgeblichen Teil. Doch inwiefern werden die psychologischen Erkenntnisse über die Raumintelligenz und deren einzelne Faktoren – gerade unter dem Aspekt der Trainierbarkeit, Förderung und Weiterentwicklung des Raumvorstellungsvermögens – im Unterricht bewusst integriert? Die Analyse von geometrischen Aufgaben, welche im Mathematikunterricht der ersten bis zur zehnten Schulstufe gestellt werden, zeigt auf, dass vorrangig der Faktor räumliche Visualisierung/Veranschaulichung angesprochen wird, die weiteren Faktoren der Raumvorstellung dahingegen gar nicht bzw. nur zu einem deutlich untergeordnetem Maße im Unterricht enthalten sind (Maier, 1994, S. 237 ff). Diese Situation führte uns zur Frage: Wirkt sich eine aktive Auswahl von Unterrichts-Beispielen, welche in einem ausgewogenen Maße die unterschiedlichen Faktoren des Raumvorstellungsvermögens trainieren, positiv auf die Förderung der Raumintelligenz aus? Das Forschungsprojekt GeodiKon (Entwicklung eines *didaktischen Konzepts* für den *Geometrieunterricht*) beschäftigt sich gezielt mit diesem Fragenkomplex.

Ein weiteres Themenfeld wurde im Rahmen von GeodiKon adressiert: Die Messung der Raumintelligenz bei Lernenden erfolgt zumeist im Rahmen von Tests. Diese Tests sind im Allgemeinen aus unterschiedlichen Aufgabengruppen und -typen aufgebaut, welche gezielt unterschiedliche Faktoren der Raumintelligenz adressieren und schließlich ausweisen, inwiefern die einzelnen Faktoren bei Individuen ausgeprägt sind. Diese speziellen Aufgabengruppen, die gezielt die Fähigkeiten von Individuen bei einzelnen Faktoren aufzeigen, werden als sogenannte „Marker“ für den jeweiligen Faktor bezeichnet (Hegarty u. Waller, 2005). Nur dann, wenn die einzelnen Markeraufgaben mit der intendierten Bearbeitungsstrategie von ProbandInnen bearbeitet werden, wird tatsächlich die Fähigkeit eines Individuums bei dem jeweiligen Faktor erhoben und nur dann können valide, aussagekräftige und vergleichbare Ergebnisse nach der Testauswertung erwartet werden. Die jüngere Literatur über Raumintelligenzforschung zeigt oftmals die Problematik auf, dass ProbandInnen durchwegs situativ-individuell unterschiedliche Bearbeitungsstrategien für die Lösung von Raumvorstellungsaufgaben verwenden (Glück u. Vitouch, 2008; Kaufmann, 2008; Souvignier, 2000). Dies eröffnet ein breites Feld an Fragen, wie z.B.: Inwiefern kann mit Raumvorstellungstests tatsächlich die Fähigkeit von Individuen

bei den unterschiedlichen Faktoren der Raumintelligenz erhoben werden? Oder: Welche und wie viele unterschiedliche Strategien zur Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben verwenden Lernende?

Strategien rücken somit mehr und mehr in den Fokus der Betrachtungen. Aussagen wie „Der flexible Einsatz von Strategien bzw. der Einsatz einer adäquaten Strategie je nach Aufgabenstellung, ist ein wichtiger Faktor bei der Erzielung optimaler Leistungen bei räumlichen Aufgaben“ (Kaufmann, 2008; Glück et al., 2005) oder „Der Umfang des Strategierepertoires einer Person und ihre Flexibilität bei der Anpassung an die Anforderungen der jeweiligen Aufgabenstellung sind deshalb relevanter für Alltagsleistungen als einfache kognitive Basisprozesse“ (Glück u. Vitouch, 2008) bestärken die Intention, Bearbeitungsstrategien näher zu untersuchen. Hinweise darauf gibt es nicht zuletzt bereits bei Maier (1994, S. 55) mit der Aussage, dass „übliche alternative Lösungsstrategien mittels weiterer kognitiver Qualifikationen oder veränderter räumlich-visueller Bezüge deshalb die gebotene Beachtung finden sollten“. Im Rahmen des Forschungsprojekts GeodiKon wurde das Themenfeld „Strategien“ bewusst aufgegriffen um Fragen wie „Mit welchen Bearbeitungsstrategien bearbeiten ProbandInnen Raumvorstellungstests?“ oder „Wirkt sich eine bewusste Schulung von unterschiedlichen Lösungsstrategien und damit verbunden das Erweitern des individuellen Strategierepertoires positiv auf das Raumvorstellungsvermögen aus?“ näher zu beleuchten.

Die Forschungshypothesen

Die beiden Themenfelder Faktoren und Bearbeitungsstrategien stellen den Fokus der Untersuchungen im Rahmen von GeodiKon dar. Zwei Forschungshypothesen wurden formuliert:

1. Das Training (Bewusstmachung, Kategorisierung, angewandtes Üben) jedes einzelnen der Faktoren der Raumintelligenz bewirkt eine Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens.
2. Die Schulung (Bewusstmachung, Kategorisierung, Verinnerlichung) eines Strategierepertoires zur Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben bewirkt eine Verbesserung des Raumvorstellungsvermögens.

Die im Projekt erhobene Vielzahl von Daten ermöglicht neben der Suche von Antworten auf die beiden obigen Hypothesen unter anderem das Formulieren von Hinweisen über einen Zusammenhang von speziellen Freizeitaktivitäten und Raumintelligenz, über einen Zusammenhang von Computernutzung und Raumintelligenz, über die Peilgenauigkeit von Individuen und über geschlechtsspezifische Effekte. In diesem Beitrag werden konkret die Beiträge des Geometrieunterrichts zur Förderung des Raumvorstellungsvermögens und die Peilgenauigkeit von Individuen erörtert.

Welches der zahlreichen in der Literatur formulierten Faktorenmodelle der Raumintelligenz sollte bei GeodiKon verwendet werden? Während der faktoriellen Phase der Raumintelligenzforschung (Maresch, 2013) zwischen 1950 und 1994 wurden von zahlreichen ForscherInnen faktorenbasierte Modelle des Raumvorstellungsvermögens beschrieben (z.B. Thurstone, 1950; French, 1951; Guilford, 1956; Rost, 1977; Lohman, 1979; McGee, 1979; Linn u. Peterson, 1985; Lohmann, 1988; Carroll, 1993 und Maier, 1994). Eine eingehende Analyse und ein Vergleich dieser Modelle wurden zu Beginn des Projekts GeodiKon durchgeführt (Maresch, 2013). Der Ansatz von Maier (Maier, 1994) wurde als Zusammenführung der bis zu diesem Zeitpunkt vorliegenden Modelle formuliert und diente daher für GeodiKon als Ausgangspunkt der Betrachtungen. Das 3-Faktoren-Modell von Thurstone (1950) mit den Faktoren Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Beziehungen und Räumliche Orientierung diente Maier als Grundlage seines Ansatzes und das ebenfalls aus 3 Faktoren bestehende Modell von Linn u. Petersen (1985) mit den Elementen Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Wahrnehmung und Mentale Rotation erwies sich als „herausragende Ergänzung“ (Maier, 1994, S. 50) dazu. Somit fasste Maier diese beiden Modelle zusammen und formulierte sein Modell mit den fünf Faktoren Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Wahrnehmung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation und Räumliche Orientierung (Maier, 1994, S. 51). Bei der näheren Untersuchung des Modells von Maier konnte festgehalten werden, dass die vier Faktoren Veranschaulichung/räumliche Visualisierung, Räumliche Beziehungen, Mentale Rotation und Räumliche Orientierung in der Literatur bei mindestens jeweils drei bis zu neun weiteren Modellen anderer ForscherInnen ebenfalls postuliert wurden (Maresch, 2013). Lediglich der Faktor Räumliche Wahrnehmung wurde nur von Linn u. Petersen (1985) formuliert. Die Beschreibung dieses Faktors zeigt, dass mit Räumlicher Wahr-

nehmung im Sinne Linn u. Petersens (1985, Maier, 1994) konkret die „Fähigkeit zur Identifikation der Horizontalen und Vertikalen“ angesprochen wird. Diese sehr spezifische Fähigkeit erachten unter anderem Thurstone (1950) als integrativen Teil des Faktors Räumliche Orientierung. Die Räumliche Wahrnehmung wurde daher nicht weiter als eigenständiger Faktor berücksichtigt. Bei GeodiKon wurde somit das Modell von Maier – jedoch ohne den Faktor Räumliche Wahrnehmung – als Basis für die Entwicklung der Lernmaterialien und der Zusammenstellung der Testbatterien verwendet.

Konkret beinhaltet das faktorielle Modell der Raumintelligenz für GeodiKon die vier Faktoren:

- Veranschaulichung/räumliche Visualisierung
- Räumliche Beziehungen
- Mentale Rotation
- Räumliche Orientierung

Neben den Faktoren der Raumintelligenz stellt das Bewusstmachen von unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien zur Lösung von Raumvorstellungsaufgaben den Fokus bei GeodiKon dar. Als Ziel kann erachtet werden, dass Informationen über Strategien möglichst fokussiert, klar und strukturiert an die SchülerInnen weitergegeben werden können. Um dies realisieren zu können, wurde eine Recherche der vorliegenden Literatur vorgenommen (Maresch, 2014b). Konkrete Auflistungen von unterschiedlichen Bearbeitungsstrategien lieferten unter anderen Barratt (Key features strategies, Move object strategies, Move self strategies) (1953), Just u. Carpenter (Mentale Rotation um das Weltkoordinatensystem, Mentale Rotation um ein Benutzerkoordinatensystem, Merkmale von Objekten miteinander vergleichen, Perspektivenwechsel) (1985), Dünser (Man bewegt sich selbst oder man bewegt das Objekt, Konzentration auf Details oder auf das Ganze, Nachdenken und Vorstellen) (2005, S. 159) und Schultz (Mental rotation strategy, Perspective change strategy, Analytic strategy) (1991). Zusätzlich zu den erwähnten Strategien werden oftmals weitere Bezeichnungen und Begriffe wie Ausweichstrategien, Ergänzungsstrategien, Mischstrategien, verbal-analytische Strategien sowie logisch-folgerndes Denken (Grüßing, 2002; Maier, 1994; Souvignier, 2000) formuliert, die nach näherer Betrachtung als integrative Teile der obigen Strategien zugeordnet werden können.