texte zur
mathematischen
forschung und lehre

52

texte zur mathematischen forschung und lehre 52

Michael Meyer

Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht

Von der Abduktion zum Argument

Verlag Franzbecker

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek
La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet à l'adresse http://dnb.d-nb.de.

Michael Meyer: Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht
ISBN 978-3-88120-441-5

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Erziehungswissenschaften, vorgelegt beim Fachbereich Mathematik und Informatik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster .

Verlag Franzbecker KG
Hildesheim, Berlin, 2006
reihe: texte zur mathematischen forschung und lehre, band 52

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jörg Voigt, der mein Interesse an der wissenschaftlichen Tätigkeit in der Didaktik der Mathematik geweckt und gefördert hat. Während unserer Zusammenarbeit hat er mich auf vielfältige Weise unterstützt, wobei ich insbesondere seine mir stets eingeräumte Zeit und die vielen konstruktiven Diskussionen hervorheben möchte. Seine wertvollen Anregungen und hilfreichen Ratschläge haben diese Arbeit wesentlich beeinflusst und bereichert.

Weiterhin bedanke ich mich bei Frau Prof. Dr. Marianne Grassmann für ihre Bereitschaft das Zweitgutachten zu übernehmen sowie den Teilnehmern der Doktoranden- und Forschungskolloquien für die anregenden Diskussionen.

Einen entscheidenden Anteil am Zustandekommen dieser Arbeit hatten die Lehrerinnen, Lehrer und Schüler, deren Unterricht übernommen und beobachtet werden durfte. Ihre nicht selbstverständliche Bereitschaft sei an dieser Stelle dankend erwähnt.

Thomas Micklich gab mir wertvolle philosophische Hinweise. Marita Lüsse sowie Nicole Meyer lasen gewissenhaft Korrektur und unterstützten mich – ebenso wie meine Eltern – während der Studien- und Promotionszeit. Ihnen allen gebührt mein abschließender Dank.

Münster, im Mai 2006

Inhalt

1. Einleitung

Das Entdecken und das Begründen im Mathematikunterricht bilden das Thema der vorliegenden Arbeit. Sowohl auf theoretischer als auch auf empirischer Basis werden Zusammenhänge und Unterschiede zwischen diesen beiden Begriffen herausgearbeitet. Die Existenz solcher Zusammenhänge ist dem mathematisch Tätigen aus der Erfahrung bekannt. Beispielsweise können bei einem eigenständigen Beweisversuch mathematische Beziehungen entdeckt oder Hypothesen durch den Nachweis mathematischer Beziehungen gerechtfertigt und anschließend mittels eines schlüssigen Beweises begründet werden.

Trotz solcher Erfahrungen fehlen theoretische Begriffe, um die Zusammenhänge genauer erfassen bzw. erklären zu können. Hinsichtlich der Analyse von Begründungen sind solche Begriffe gegeben: Sofern formale Beweise der Hochschulmathematik analysiert werden sollen, kann die mathematische Logik verwendet werden. Für eine eher inhaltliche Analyse von Begründungen bietet sich die mathematikdidaktische Argumentationstheorie (u.a. Schwarzkopf 2000) an.

Für die Analyse von Entdeckungen finden sich jedoch in der wissenschaftlichen Mathematik keine hinreichenden theoretischen Begriffe, die reale Entdeckungsprozesse analysieren lassen. Der Entstehungsprozess mathematischer Ergebnisse wird in Veröffentlichungen auch nur selten wiedergegeben. Abel sagte daher über Gauß: „Er macht es wie der Fuchs, der seine Spuren im Sande mit dem Schwanz auslöscht“ (zitiert nach Meschkowski 1990, S. 116). Der „context of discovery“ (Reichenbach 1949, S. 6f) spielt also im Gegensatz zu dem in mathematischen Publikationen präsentierten „context of justification“ (ebd.) eine untergeordnete Rolle. Die Funktion des „Spurenverwischens“ liegt auf der Hand: Die Darstellung der potentiellen Komplexität und Verworrenheit der Suche nach neuen Erkenntnissen könnte das Verständnis der Ergebnisse behindern und trägt zudem in keiner Form zur Gültigkeit eines nachträglichen Beweises bei. Das Aufstellen von Hypothesen wird lediglich mit vagen Begriffen wie dem der „Intuition“ verbunden: „An indispensable partner to proof is mathematical intuition. This tells us what to try to prove” (Hersh 1997, S. 7). Entdeckungen basieren aber auf einem inhaltlichen Verständnis des Neuen. Dieses Verständnis zu mystifizieren, indem man es der „Intuition“ zuschreibt, ohne diese zu rekonstruieren scheint eher nicht wissenschaftlich zu sein. Zugespitzt schreibt Peirce: „We have no power of Intuition, but every cognition is determined logically by previous cognitions” (CP 5.265).

Aber auch innerhalb der Mathematikdidaktik fehlen die theoretischen Grundlagen zur Analyse von Entdeckungsprozessen. Obwohl seit mehr als 20 Jahren vehement das „entdeckende Lernen“ (auch unter Verwendung anderer Begriffe) für den Schulunterricht gefordert wird (s. KM NRW 1985, S. 26f; Winter 1984; Wittmann 1981, S. 34ff), bleiben die theoretischen Grundlagen auf pädagogisch-psychologische Aussagen und Hypothesen beschränkt.

Es fehlt also eine mathematikdidaktische Theorie, die sowohl Begründungen als auch Entdeckungen sowie ihre Zusammenhänge im Mathematikunterricht zu analysieren ermöglicht, so dass

- die Kreativität von Hypothesen,
- die Plausibilität von Hypothesen,
- der Begründungsbedarf von Hypothesen,
- die Schlüssigkeit bzw. Überzeugungskraft von Begründungen sowie
- die Interaktionsprozesse zwischen Lehrern und Schülern beim Entdecken und Begründen

erfasst werden können. Ziel des theoretischen Teils dieser Arbeit ist das Erstellen eines hierfür adäquaten Begriffsnetzes. Mit diesem Begriffsnetz soll eine logische Analyse von Schüleräußerungen ermöglicht werden. Das Vorgehen erfolgt zugleich möglichst theoretisch fundiert und praxisnah: Einerseits erfolgt im theoretischen Abschnitt dieser Arbeit eine Vertiefung in philosophisch-logische Grundlagen, und andererseits werden diese Grundlagen zur Rekonstruktion faktischer Unterrichtsprozesse angewendet.

Im Zentrum des Begriffsnetzes steht die Theorie von Abduktion, Induktion und Deduktion des amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce. Mit der Schlussform Abduktion und der Klärung ihres erkenntnistheoretischen Gehalts wird versucht, den Begriff „Entdeckung“ zu schärfen, ihm eine Struktur zu verleihen und somit Entdeckungen analysierbar zu machen. Mit einem Zusammenspiel von Deduktion und Induktion erklärt Peirce, wie abduktiv gewonnene Hypothesen bestätigt werden können. Dieser von Peirce rekonstruierte Zusammenhang zwischen dem Entdecken und dem Begründen ist für die empirischen Wissenschaften angebracht, jedoch nicht für die Mathematik. Hier hat die Induktion eher eine heuristisch-psychologische, statt eine wahrheitssichernde Funktion. Dieses Problem soll in der Arbeit theoretisch gelöst werden, indem das für die Mathematik spezifische Zusammenspiel der Schlussformen herausgearbeitet wird. Weiterhin werden in diesem Teil der verwendete Argumentationsbegriff und das Analyseschema von Stephen Edelston Toulmin vorgestellt, welches sich in vorhergehenden mathematikdidaktischen Arbeiten bewährt hat (u.a. Knipping 2003; Krummheuer 1995; Schwarzkopf 2000). Dieses Schema wird anschließend den drei Schlussformen gegenübergestellt, so dass auf theoretischer Ebene letztlich ein kohärentes Begriffsnetz zum Entdecken und Begründen entsteht.

Im methodologischen und methodischen Teil wird zunächst der für die empirische Analyse notwendige Blickwinkel auf den Mathematikunterricht dargestellt. Dieser ist durch ethnomethodologische und interaktionistische Ansätze bestimmt. Der empirische Teil dieser Arbeit reiht sich in den Bereich der interpretativen Unterrichtsforschung ein. Die Interpretation von Schüleräußerungen richtet sich im Wesentlichen nach dem von Voigt (1984) beschriebenen Verfahren. Hierbei wird zudem herausgearbeitet, dass die Abduktion sowohl den Forschungsgegenstand, als auch die bestimmende Schlussform bei der Interpretation darstellt. Im Anschluss daran erfolgt die Beschreibung des Untersuchungsplans und -verfahrens. Diesen Teil abschließend werden einige Probleme aufgeführt, die sich bei der Analyse von Entdeckungen und Begründungen ergeben können (u.a. implizite Anteile von Äußerungen, Äquivalenzaussagen).

Im empirischen Teil wird die den Schüleräußerungen inhärente Rationalität beim entdeckenden Lernen herausgearbeitet. Analysiert werden mündlich im Unterricht geführte Entdeckungs- und Begründungsprozesse. Als Werkzeug für die Rekonstruktion von Prozessen der Erkenntnisgewinnung wird insbesondere das im theoretischen Teil beschriebene Abduktionsschema erprobt. Die Rekonstruktion von Begründungen erfolgt mit den Schemata der Deduktion, der Induktion und/oder dem Analyseschema von Toulmin. Der Leser soll jedoch nicht erwarten, dass die rekonstruierten Entdeckungen und Begründungen das konkrete Denken des einzelnen Schülers wiederspiegeln. Mit anderen Worten: Das im theoretischen Teil dieser Arbeit entwickelte Begriffsnetz eignet sich nicht zur genauen Erfassung der „Intuition“ oder des „Geistesblitzes“. Zwar können diese mittels der vorgestellten Theorie etwas genauer beschrieben und gefasst werden, ihre grundsätzliche Mystik bleibt jedoch nach wie vor erhalten. Der Focus der Analyse liegt vielmehr darauf, die Rationalität von Entdeckungen aufzuzeigen.

Der Unterrichtsversuch, welcher die empirische Grundlage für die vorliegende Studie darstellt, fand in den Klassenstufen 4 (Grundschule), 7 und 10 (Gymnasium) statt. Insgesamt wurde der Mathematikunterricht in sieben Klassen für eine Dauer von jeweils 4-5 Schulstunden von einem Wissenschaftler durchgeführt und mittels Audio- und Videotechnik dokumentiert. Da für eine eingehende Analyse auch eine stoffdidaktische Betrachtung notwendig ist, wurde aus Ökonomiegründen mit dem Funktionsbegriff ein thematischer Schwerpunkt gewählt.

Die Analysen lassen u.a. erkennen, welch komplexes argumentatives und abduktives Potential Schüler entwickeln können. Zudem zeigt sich die Mehrdeutigkeit von Äußerungen (sowohl hinsichtlich der Bedeutung von Worten, als auch hinsichtlich der logischen Zusammenhänge), die dann vor dem theoretischen Hintergrund dieser Arbeit als ein entscheidendes und notwendiges Charakteristikum des entdeckenden Lernens herausgearbeitet wird. Weitere Schwerpunkte sind beispielsweise die Notwendigkeit des Vorwissens der Schüler für tiefergehende Entdeckungen und die Funktion der Lehrerrolle des „Advocatus Diaboli“.

Letztlich bedarf es noch einiger Anmerkungen: Der als Mathematiker sozialisierte Leser wird wissen, dass der Schluss von einer Aussage zu einer anderen nur bei Kenntnis eines passenden Vermittlungsgesetzes erlaubt ist. Entsprechend werden unter der Bezeichnung „Schluss“ nur notwendige und sichere Folgerungen verstanden. Hierbei wenden wir uns bekannte Gesetze an. Wenn aber im Folgenden die Mathematik (bzw. das Wissen allgemein) in ihrem Entstehungsprozess betrachtet werden soll, so ergibt sich ein Problem: Die Gesetze sind uns zuvor nicht bekannt – zumindest nicht hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf die betrachteten Phänomene. Es bedarf daher eines ausgedehnteren Verständnisses von Begriffen wie „Schluss“ oder „Folgerung“, so dass es möglich wird, die Rationalität von Entdeckungsprozessen wiederzugeben.

Die Schwerpunkte der vorliegenden Arbeit liegen auf der Entwicklung und Erprobung theoretischer Begriffe für die Mathematikdidaktik. Die Arbeit erhebt dabei keinen Anspruch auf die Entwicklung von Lernarrangements. Generell sind die unterrichtspraktischen Resultate der Arbeit derzeit noch begrenzt. Hier scheint noch Potential für weiterführende Studien zu liegen.

Redaktionelle Anmerkungen:

- Auf eine getrennte Nennung der männlichen und weiblichen Form wird in dieser Arbeit verzichtet. Das jeweils andere Geschlecht sei stets mitbedacht.
- Hervorhebungen in Zitaten entsprechen dem Original.
- Die Nummerierung der Abbildungen erfolgt nach Kapitelnummern und fortlaufend alphabetisch; z.B.: „Abb. 2c“ kennzeichnet im zweiten Kapitel die dritte Abbildung.
- Alle im Text auftretenden Personen wurden anonymisiert (Pseudonyme).

2. Entdecken und Begründen

Das Entdecken und das Begründen (bzw. die Kreativität und die Argumentation) nehmen in der Mathematik und ihrer Didaktik bedeutende Rollen ein. Entsprechend sind solche Begriffe auch Gegenstand vieler Lernzielkataloge (u.a. Winter 1975, Krauthausen 1998). Im Folgenden wird zunächst das Entdecken und anschließend das Begründen theoretisch reflektiert und entsprechend ausgewählter Aspekte erörtert. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen diesen Tätigkeiten diskutiert.

2.1 Entdeckendes Lernen

Hinsichtlich des Verständnisses von Lehren und Lernen hat sich in den letzten Jahrzehnten interdisziplinär ein Paradigmenwechsel vollzogen (s. im deutschsprachigen Raum insbesondere die Arbeiten von Winter sowie von Wittmann und Müller). Traditionelle Lehrverfahren treten in den Hintergrund. Das „Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte“ wurde in den nordrhein-westfälischen Lehrplänen Mitte der achtziger Jahre abgelöst:

> „Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als ein konstruktiver, entdeckender Prozess aufgefaßt wird. Der Unterricht muß daher so gestaltet werden, daß die Kinder möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten […].“ (KM 1985, S. 26; vgl. MSJK 2003, S. 72f)

Das entsprechende Unterrichtsprinzip wird als „(aktiv) entdeckendes Lernen“ bezeichnet und lässt sich in den Unterrichtsformen des „gelenkten Entdeckens“ (Winter 1991 und 1987) und des „genetischen Unterrichts“ (Wittmann 1981) mit unterschiedlich starken Akzentuierungen der Eigenaktivität der Schüler im Mathematikunterricht wiederfinden. Für Bruner, der die Theorie des entdeckenden Lernens wesentlich beeinflusst hat, ist dabei eine

> „[...] Entdeckung ihrem Wesen nach ein Fall des Neuordnens oder Transformierens des Gegebenen [...]. Dies so, daß man die Möglichkeit hat, über das Gegebene hinauszugehen, das so zu weiteren neuen Einsichten kombiniert wird.“ (ebd. 1981, S. 16)

Im Folgenden werden nun einzelne Aspekte des Lernens wiedergegeben, wobei das Lernen als konstruktiver, entdeckender Prozess aufgefasst wird. Nach einer kurzen lerntheoretischen Einführung erfolgt die Beschreibung der Auswirkungen des Paradigmenwechsels für Lehrer und Schüler. Obwohl entdeckendes Lernen als Begriff zunächst vorrangig im Grundschulbereich genutzt wurde, zeigen sich entsprechende Ansätze auch im Rahmen des Unterrichts an weiterführenden Schulen. Dies geschieht auch unter den Schlagwörtern „Problemlösen“ und „(neo-)sokratisches Gespräch“.