

texte zur mathematischen forschung und lehre

46

Elisabeth Rathgeb-Schnierer

# Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen

Eine Untersuchung zur Entwicklung von  
Rechenwegen bei Grundschulkindern  
auf der Grundlage offener Lernangebote und  
eigenständiger Lösungsansätze

1. Auflage April 2006  
Veröffentlicht im Verlag Franzbecker  
Hildesheim

© 2006 Verlag Franzbecker, Hildesheim

ISBN 978-3-88120-422-4  
Elisabeth Rathgeb-Schnierer  
Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen  
Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der  
Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze

tmfl Band 46

[www.franzbecker.de](http://www.franzbecker.de)



# Vorwort

Mit anderen Worten, das Medium für die Genese ist die Kommunikation unter den Suchenden.  
(BAUERSFELD 2002, 12)

Die vorliegende Arbeit setzt sich mit der Entwicklung von Rechenwegen auseinander. Dabei beschreibt sie nicht nur einen wichtigen Entwicklungsprozess von Grundschulkindern, sondern spiegelt in besonderem Maße meinen eigenen Entwicklungsprozess wider. Die intensive Auseinandersetzung mit Kindern, verknüpft mit allen Erfahrungen, die ich während dieser Zeit machen konnte, haben meinen Blick für die kindlichen Lernprozesse geweitet und verändert. Während der Entstehung der Arbeit wurde mir immer wieder deutlich, dass Entwicklungsprozesse in keiner Weise planbar sind und ausreichend Raum und Zeit zum Wachsen benötigen. Allen Personen, die mir diesen Raum und diese Zeit gaben, und die durch unermüdliche Kommunikationsbereitschaft den Entstehungsprozess gestützt und damit aufrechterhalten haben, möchte ich an dieser Stelle ausdrücklich danken. Sie waren für mich – jeder auf seine Art – Mitsuchende, die wesentlich zur Genese dieser Arbeit beitrugen.

Ganz besonderer Dank gilt meinen beiden Gutachterinnen Frau Prof. Dr. Sybille Schütte und Frau Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker.

Frau Schütte legte den Grundstein für diese Arbeit, indem sie mich durch ihre eigenen Forschungsinteressen, ihre Art und Weise Mathematikunterricht zu sehen und ihre unbegrenzte Lust am Denken von Kindern für diesen Themenbereich begeisterte und motivierte. Sie trug durch ihre mathematikdidaktische Sensibilität und Kompetenz, durch andauernde Gesprächs- und Diskussionsbereitschaft sowie durch konstruktive Anregungen und Kritik wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei. Dankbar bin ich ihr für die richtigen Anstöße zur passenden Zeit sowie für alle Freiräume, die ich hatte und die es mir ermöglichten, die Arbeit auf eigenen Wegen zu entwickeln und ihr ein eigenes Profil zu verleihen.

Frau Hefendehl-Hebeker war spontan dazu bereit, diese Arbeit mitzubetreuen. Sie zeigte ständig Bereitschaft für Gespräche und Beratung und unterstützte alle Entwicklungen, die dieses Projekt nahm. Besonders danken möchte ich ihr für das andauernde Vertrauen in das Gelingen dieser Arbeit.

Wertvolle Unterstützung, interessante Hinweise und kritische Anregungen erhielt ich auch im Rahmen von Nachwuchskolloquien und Tagungen. Allen dar-

an Beteiligten gilt mein Dank, vorrangig Herrn Prof. Dr. Herrmann Maier, der mich durch seine positive Reaktion auf das Projekt und seine methodischen Anregungen unterstützte.

Das Projekt verdankt seine ureigene Gestalt all denjenigen, die an den Unterrichtsaktivitäten beteiligt waren. An erster Stelle seien alle Kinder genannt, mit denen ich im Unterricht zusammenarbeitete und die dazu bereit waren, sich auf einen ihnen unbekanntem Weg des Mathematiklernens einzulassen, und mir geduldig und manchmal mit großer Mühe Einblicke in ihre Rechenwege eröffneten. Stellvertretend für alle Kinder danke ich den Schülerinnen und Schülern der Klasse 2b der Mozartschule in Hussenhofen: Saba, Albert, Michael F, Simone, Michael R., Katharina, Ramak, Veronika, Kaan, Lisa, Sascha, Tanja, Michael D., Tanja, Emre, Jessica, Renato, Büsra und Christina.

Zum Gelingen der Unterrichtsarbeit haben die zwei Kolleginnen und Freundinnen Rita Schurr und Dagmar Hanke wesentlich beigetragen. Sie begleiteten den Unterrichtsprozess und unterstützten meine Arbeit mit konstruktiver Kritik, dem rechten Maß an Lob sowie innovativen Anregungen und Ideen. Ich habe durch die Zusammenarbeit mehr von ihnen gelernt, als sie vermuten.

Neben dem Oberschulamt, das die Arbeit in der Schule genehmigte, sei an dieser Stelle besonders Herrn Ludwig Grimminger (Schulleiter der Mozartschule Hussenhofen) gedankt, der mich jederzeit offen in seiner Schule aufnahm und es mir ermöglichte, den Mathematikunterricht in zwei verschiedenen Klassen zu übernehmen.

Ohne die Mitarbeit der studentischen Hilfskräfte, die von der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd finanziert wurden, wäre das Projekt in diesem Umfang nicht möglich gewesen. Für zuverlässiges Mitarbeiten und reges Mitdenken beim Transkribieren und Interpretieren der Daten danke ich Christine Hoffmann, Melanie Steiner, Tanja Pillmann, Bianca Blersch und Vanessa Sbosny.

Stellvertretend für alle Hochschulmitglieder, die sich für meine Belange einsetzen, gilt mein besonderer Dank dem ehemaligen Rektor Herrn Prof. Dr. Manfred Wespel.

Für die mannigfaltige inhaltliche und menschliche Unterstützung ein herzliches Dankeschön allen Mitgliedern der Institute für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschulen Schwäbisch Gmünd und Ludwigsburg. Besonders danken möchte ich in diesem Zusammenhang meinem ehemaligen Kollegen Dr. Achim Sander für die zahlreichen Gespräche und die arbeitsintensive kritisch konstruktive Durchsicht des gesamten Manuskripts.

Udo Roos und Thomas Holz sei für ihre intensive Korrekturarbeit gedankt, wie auch meiner Freundin Martina Seefeld für ihre Hilfe in Layoutfragen.

---

Den allergrößten Dank schulde ich zweifellos meiner Familie, die diese Arbeit mit allen Konsequenzen unterstützte. Meinen beiden Söhnen Simon und Micha möchte ich für ihre Geduld danken, die sie aufbringen mussten, wenn wieder einmal der Schreibtisch wichtiger war als gemeinsame Aktivitäten. Die beiden haben mich in Zeiten größter Anspannung immer wieder den nötigen Abstand zur Arbeit finden lassen, und aus dieser Distanz heraus konnte dann auch manches klarer gesehen werden.

Ohne meinen Mann Werner Schnierer hätte diese Arbeit nicht entstehen können. Die vielen Korrekturarbeiten und die fruchtbaren Diskussionen waren dabei der kleinste Teil der Unterstützung. Er hielt mir in allen Bereichen des Alltags den Rücken frei und stellte hierfür eigene Interessen und spannende Projekte hinten an.

*Elisabeth Rathgeb-Schnierer*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	1
<b>1 Stand der Forschung</b>	7
1.1 Forschung zum additiven Rechnen	9
1.2 Zusammenfassung: Forschungsergebnisse und Forschungsdesiderate	20
<b>2 Theoretische Hintergründe</b>	25
2.1 Konstruktivistische Sichtweisen	25
2.1.1 Verschiedene Ansätze	25
2.1.2 Priorität des Verstehens	32
2.1.3 Lernen und Lehren	37
2.1.4 Konstruktivistische Lernumgebungen	42
2.1.5 Zusammenfassung und Ausblick: Konstruktivistische Sichtweisen und erste Folgerungen für den Prozess der Rechenwegsentwicklung	45
2.2 Rechnenlernen	48
2.2.1 Begriffsklärungen	48
2.2.2 Theorieansätze zum Rechnenlernen	61
2.2.2.1 Halbschriftliches Rechnen – Rechnenlernen mit Einsicht und Verständnis	64
2.2.2.2 Rechnenlernen auf eigenen Wegen	71
2.2.2.3 Flexibles Rechnen fördern	79
2.3 Grundannahmen zur Rechenwegsentwicklung	88
<b>3 Darstellung und Begründung der empirischen Untersuchung</b>	97
3.1 Forschungsfragen	97
3.2 Methodische Vorüberlegungen und Grundentscheidungen	99
3.3 Das Untersuchungsdesign	104
3.3.1 „Teaching experiment“ als Hintergrund des Untersuchungsdesigns	110

3.4 Interviews – Hintergründe und Interviewaufgaben	114
3.4.1 Überlegungen zum Einsatz und zur Planung der Interviews	114
3.4.2 Die Interviewaufgaben	120
3.5 Lernumgebung – Hintergründe und Gestaltung	127
3.5.1 Hintergründe: Offene Lernangebote und Kommunikation	127
3.5.2 Gestaltung der Lernumgebung	135
3.6 Darstellung des Untersuchungsverlaufs	147
3.6.1 Unterrichtsaktivitäten I	148
3.6.2 Interviewdurchlauf I	154
3.6.3 Unterrichtsaktivitäten II	157
3.6.4 Interviewdurchlauf II	169
3.6.5 Unterrichtsaktivitäten III	173
3.6.6 Interviewdurchlauf III	177
3.7 Dokumentation und Auswertung der Daten	181
3.7.1 Arbeitsschritte der Datendokumentation	181
3.7.2 Verfahren der Datenauswertung	188
3.7.3 Dokumentation einer Interviewanalyse	194
<b>4 Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen</b>	<b>217</b>
4.1 Ausgewählte Lernbiographien	217
4.1.1 Simone	218
4.1.2 Michael F.	229
4.1.3 Veronika	241
4.1.4 Michael D.	253
4.2 Lösungsverhalten und Deutungshypothesen	267
4.2.1 Varianten im Lösungsverhalten	267
4.2.2 Deutungshypothesen	272
<b>5 Resümee und Perspektiven</b>	<b>293</b>
<b>Literatur</b>	<b>301</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>321</b>



# Einleitung

In der Arithmetik können die Kinder mit Zahlen reflektiert umgehen, sie können zum Beispiel ordnen, vergleichen, strukturieren und Beziehungen entdecken. [...] Oberstes Ziel ist der aufgabenadäquate Einsatz flexibler Rechenstrategien. (BILDUNGSPLAN BW 2004, 55)

Flexibles Rechnen wird in den Bildungsstandards für Mathematik (Grundschule), die ab dem Schuljahr 2004/2005 in Baden-Württemberg verbindlich sind, als zentrales Ziel im Bereich der Arithmetik genannt<sup>1</sup>. Anhand komplexer und herausfordernder Aufgabenstellungen, die das Entwickeln *individueller* Lösungsansätze und Strategien anregen, soll das flexible Rechnen gefördert werden. Grundlegende Unterrichtsprinzipien sind hierbei handlungsorientiertes Arbeiten und entdeckendes Lernen (a. a. O., 56). Der neue Bildungsplan beschreibt eine veränderte Unterrichtskultur, die den Kindern „verstehenden Umgang mit Mathematik“ (ebd.) ermöglichen soll. Wesentliche Elemente dieser neuen Unterrichtskultur sind inhaltliche Offenheit, Kommunikation<sup>2</sup> und Kooperation (ebd.). Damit ist die Abkehr vom Prinzip der kleinen und kleinsten Lernschritte und der Schwierigkeitsstufung zugunsten einer komplexen Lernumgebung zu erkennen, die eigenes Entdecken und individuelle Wege herausfordert. Dies deutet auf eine veränderte Sicht von Lernen und Lehren, die auf konstruktivistischen Lern- und Erkenntnistheorien beruht: Lernen wird als aktiver und selbstgesteuerter Prozess verstanden, in dem das Individuum sein Wissen auf der Basis seiner bisherigen Erfahrung und in Auseinandersetzung mit seiner sozialen Umwelt konstruiert und in sein bisheriges Wissensnetz einbindet (TERHART 1999, 635). Diese Perspektive wird auch innerhalb der Mathematikdidaktik weitgehend geteilt. Dabei kann man von einem Paradigmenwechsel sprechen, der sich nicht nur hinsichtlich der Vorstellungen von Lehren und Lernen vollzog, sondern zu einem Überdenken des Selbstverständnisses der Didaktik führte. SCHIPPER forderte 1997:

---

<sup>1</sup> Auch im Lehrplan von Nordrhein-Westfalen wird die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen explizit gefordert (RICHTLINIEN u. LEHRPLÄNE NRW 2003, 71 u. 75 u. 81).

<sup>2</sup> Das Kommunizieren wird in den von der Kultusministerkonferenz beschlossenen „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ als allgemeine mathematische Kompetenz beschrieben (BESCHLUSS DER KULTUSMINISTERKONFERENZ 15.10.2004, 7f).

Eine Didaktik der Grundschulmathematik kann daher nicht aus der Systematik der Fachmathematik abgeleitet werden, sie ist allein vom Denken und Lernen der Kinder her zu entwickeln.  
(SCHIPPER 1997, 122)

In dieser Aussage spiegelt sich ein Konflikt wider, der schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts benannt wurde: Hat sich der Mathematikunterricht an der Wissenschaft oder am Kind zu orientieren (DEWEY 1902/1976, 277f; GUTZMER 1905/1980, 52; KLEIN 1933/1968, 289; WITTMANN 1983, 10 u. 1996, 3ff)? Heutzutage wird eine gleichgewichtige Verbindung beider Pole betont (SCHÜTTE 1994a, 66f): FREUDENTHAL (1982, 140) beschreibt diese Verbindung als „Begegnung des Kindes mit der Mathematik in seiner Umgebung“ und spricht von „mathematischer Weltkunde“ (ebd.). SCHÜTTE (2004a, 4) fordert in diesem Zusammenhang, „die Mathematik aus der Kinderperspektive auf[zu]bauen“.

SCHIPPERS Aussage soll nicht als Plädoyer zugunsten einer einseitigen Kindorientierung verstanden werden, vielmehr macht sie Veränderungen sichtbar, die sich seit den 90er Jahren innerhalb der Mathematikdidaktik vollzogen haben:

- Das Denken von Kindern rückte in den Fokus mathematikdidaktischer Auseinandersetzung und somit auch deren eigenständig entwickelte Rechenwege (vgl. u. a. SELTER 1994; SELTER 2000, 227ff; SELTER u. SPIEGEL 2000; HÖHTKER u. SELTER 1999, 19ff; LORENZ 1997, 22ff u. 1998a, 11ff; HENGARTNER 1999).
- Die Relevanz des Mathematiklernens auf eigenen Wegen wurde zunehmend erkannt und ist inzwischen in weiten Kreisen der Mathematikdidaktik unumstritten (vgl. u. a. SCHÜTTE 1994b, 6ff u. 2004a, 3ff; WINTER 1987, 16f; WITTMANN 1990, 152ff; GALLIN u. RUF 1994, 51ff u. 1998a).

Diese Entwicklungen spiegeln sich auf schulischer Ebene wider: Das Mathematiklernen auf eigenen Wegen und der Austausch darüber wird in vielen aktuellen Bildungsplänen für die Grundschule explizit gefordert, ebenso wie die Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen (z. B. RICHTLINIEN u. LEHRPLÄNE NRW 2003, 72f; BILDUNGSPLAN BW 2004, 56f; RAHMENLEHRPLAN BRANDENBURG/BERLIN 2004, 24 u. 29).

Vor dem Hintergrund dieser Entwicklungen ist es erstaunlich, dass es in der Mathematikdidaktik erst wenige Erkenntnisse darüber gibt, wie sich das Rechnenlernen auf eigenen Wegen und die Entwicklung von flexiblen Rechenkompetenzen vollzieht (SEALTER 2000, 227).