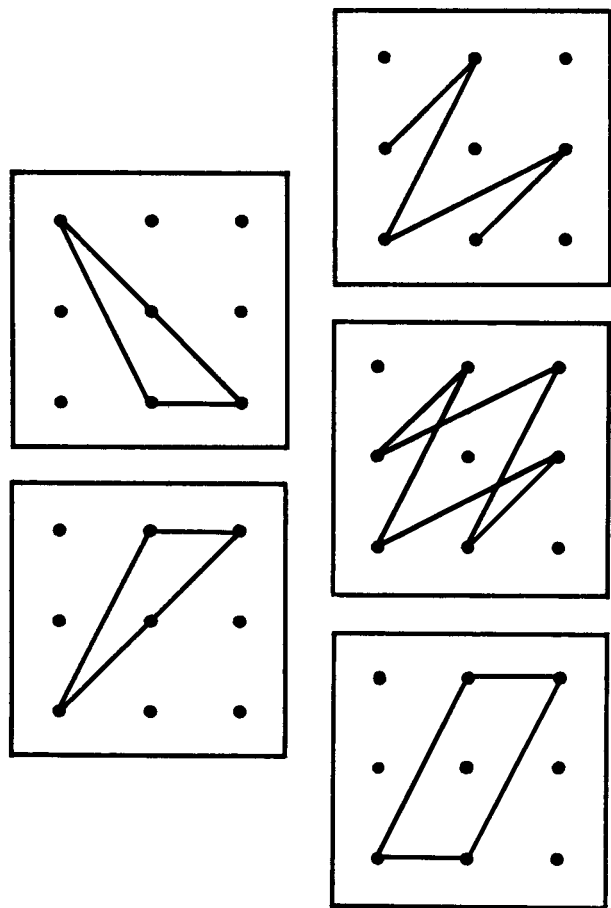


Geobrett im Unterricht

Horst Steibl



er

diverlag
franzbecker

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche
Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the
Internet at <<http://dnb.ddb.de>>.

ISBN 3-88120-417-2

Steibl, Horst: Geobrett im Unterricht

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der
Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen
vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in
irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl
für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren als auch für die
Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien.

© 2006 by Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Inhaltsverzeichnis

Einführung	5
Das Arbeitsmittel	5
Abgrenzung zu anderen Arbeitsmitteln	6
Zur Unterrichtsorganisation	6
Aufbau der Sacheinheiten	7
1. Mengenbildende Eigenschaften und Aussondern von Teilmengen (topologische Grundbegriffe)	8
1.1 Grundlagen	8
1.2. Lernziele	9
1.3. Einführungsmöglichkeiten	9
1.3.1 Geschlossene – nicht geschlossene Figuren	9
1.3.2. Einfache – nicht einfache Figuren	10
1.4. Arbeitsanweisungen	10
2 Diagrammformen zum Gliedern von Mengen	12
2.1 Grundlagen	12
2.3 Einführungsmöglichkeiten	14
2.3.1 Darstellung zweier nicht-disjunkter Mengen (Menge der einfachen Figuren – Menge der geschlossenen Figuren) im Venn-Diagramm	14
2.3.2 Ordnen einer Menge nach zwei sich nicht ausschließenden Eigenschaften am Baumdiagramm	14
3 Die Menge der Dreiecke auf dem Geobrett	17
3.1 Grundlagen	17
3.3 Einführungsmöglichkeiten	19
3.3.1 Die Menge der möglichen Dreiecke	19
3.3.2 Die Menge der Lagemöglichkeiten eines Dreiecks	19
3.4 Arbeitsanweisungen	21
4. Längen und Richtungen auf dem Geobrett	22
4.1 Grundlagen	22
4.2 Lernziele	23
4.3 Einführungsmöglichkeiten	23
4.3.1 Seitenlängen und Umfang des Dreiecks	23
4.3.2 Übungen zu den Längen	24
4.3.3. Das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck	24
4.4 Arbeitsanweisungen	25
5. Winkel auf dem Geobrett	26
5.1. Grundlagen	26
5.2 Lernziele	28
5. 3. Einführungsmöglichkeiten	28
5.3.1. Die Relation <i>...ist spitzer als</i>	28
5.3.2. Veränderungen am Winkel (der Winkel als Drehung)	29
5.3.3. Der rechte Winkel	29
5.3.4. Der rechte Winkel und der halbe rechte Winkel als Maßeinheit	29
5.4 Arbeitsanweisungen	30
5.5. Tim und Tom, die Winkel-Wichtel (ein Einschub)	32
5.6. Lernziele	35

6.	Die Menge der Vierecke- Die Teilmengerelation	36
	6.1 Grundlagen	36
	6.1.2. Klassifikation der Vierecke über die Eigenschaften der Spiegelachsen	40
	6.1.3. Klassifikation der Vierecke über die Diagonaleigenschaften.....	41
	6.2 Lernziele	44
	6.3. Einführungsmöglichkeiten	44
	6.3.1. Die Teilmengenkette.....	44
	6.3.2. Teilmengebeziehungen bezgl. der Anzahl der Spiegelachsen.....	45
	6.3.3. Drachen und symmetrisches Trapez	45
	6.3.4 Diagonaleigenschaften der Vierecke	47
	Vom Quadrat zum Drachen	47
	Vom Rechteck zum Trapez	48
	6.4 Arbeitsanweisungen	48
7	Die Drehungen, die zyklische Vierergruppe	49
	7.1. Grundlagen	49
	7.2 Lernziele (Drehungen)	52
	7.3. Einführungsmöglichkeiten	52
	7.3.1. Drehungen und Drehlagen	52
	7.3.2. Verknüpfungen von Drehungen	54
	7.3.3. Die Verknüpfungstafel	55
	7.4. Arbeitsanweisungen	56
8.	Die Spiegelungen, die Kleinsche Vierergruppe	57
	8.1 Grundlagen	57
	8.1.1. Die Spiegelungen.....	57
	8.2. Lernziele	61
	8.3. Einführungsmöglichkeiten	62
	8.3.1. Spiegelung an den Brettanten	62
	8.3.2. Das Ornament (die Translation)	62
	8.3.3. Spiegelung an den Seitenmitten (die Kleinsche Vierergruppe).....	63
	8.3.4. Spiegelung an der Diagonalen.....	63
	8.4. Arbeitsanweisungen	64
10.	Der Flächeninhalt	66
	10.1. Grundlagen	66
	10.2. Lernziele	72
	10.3. Einführungsmöglichkeiten	73
	10.3.1. Vergleich von Flächen, erste Zerlegungen	73
	10.3.2. Darstellung einer Ordnungsrelation im Hasse Diagramm.....	75
11.	Die Abhängigkeit des Flächeninhaltes von der Anzahl der Nägel auf dem Rand und im Inneren	77
	10.1 Grundlagen	77
	10.2. Lernziele	79
	10-3- Einführungsmöglichkeiten	80
	10.3.1. Abhängigkeit des Flächeninhaltes von der Anzahl der Nägel auf dem Rand und im Inneren der Figur	80
	10.3.2 Entwicklung der Pick-schen Formel	81
	10.3.3. Warum haben Figuren mit gleicher Anzahl von Nägeln auf dem Rand gleichen Flächeninhalt?	81

10.3.4. Änderung des Flächeninhaltes durch Änderung der Anzahl der Nägel	82
10.4. Arbeitsanweisungen	83
11. Die goldenen Linien im Quadrat	84
11.1. Grundlagen	84
11.1.2. Schnittpunkte der goldenen Linien	84
11.1.3. Vierecke aus dem Schnitt der Elfer-Linien	85
11.1.4. Der Flächeninhalt der Vierecke aus den g-Linien	86
11.1.5. Die Formeln zur Berechnung der Vierecke	87
11.2. Lernziele	88
11.3. Einführungsmöglichkeiten	88
11.4. Kombinatorische Aspekte	90
11.4.1. Anzahl der Klassen von Dreiecken auf dem 9-Nagel-Brett	90
11.4.2. Die Anzahl der Klassen kongruenter Vierecke	91
11.4.3. Spiel mit vier Steinen	93
12. Ausblicke	94
12.1. Äquiforme Abbildungen; die zentrischen Streckungen	95
12.2. Der Satz des Pythagoras	96

Einführung

Die Anregung, sich mit dem Geobrett zu beschäftigen, erhielt der Verfasser aus dem Buch "Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule", einer lesenswerten Aufsatzsammlung, verfasst von 26 Mitgliedern der Association of Teachers of Mathematics (Klett, Stuttgart 1970, Best.-Nr. 92 312). Die Verfasser dieser Beiträge zeigen dort, dass der Mathematikunterricht nicht notwendigerweise nach sachlogischen Gesetzmäßigkeiten streng deterministisch ablaufen muss, sondern dass ihm ein Freiheitsraum eingeräumt werden kann (und soll), der es den Kindern und dem Lehrer ermöglicht, eigene Wege zu gehen.

Das Geobrett ist ein solches Material, das zum selbständigen Erforschen herausfordert. Wenn nun hier in dieser Schrift die Möglichkeiten des Geobrettes z.T. detailliert dargelegt werden, so sollte sich der Lehrer nicht dazu verleiten lassen, solche fertigen Erkenntnisse an die Schüler heranzutragen. Auch für den Lehrer wäre es vorteilhaft, wenn er die Inhalte selbst erarbeiten würde. Der Verfasser kennt jedoch die Fülle der Angebote der Lehr- und Lernmittel und die Arbeitsbelastung des Lehrers, so dass die in dieser Schrift gewählte Art der Darstellung vielleicht die schnellste Orientierung ermöglicht.

Das Arbeitsmittel

Geobretter sind im angelsächsischen Raum bisher weiter verbreitet als im deutschsprachigen Raum.

Auf einem Brettchen sind Nägel so eingeschlagen, dass ein quadratisches Gitter entsteht. Die Abstände zwischen den Nägeln betragen mindestens 2 cm und höchstens 5 cm. Die Zahl der Nägel beträgt mindestens 9 und ist nach oben nur durch eine praktikable Größe des Brettes beschränkt. Die Brettchen sind im allgemeinen quadratisch, es gibt jedoch auch kreisförmige und hexagonale Anordnungen der Nägel. In Amerika sind auch Geoboards aus Plastik im Handel. Bei einigen Modellen sind Hilfslinien von Nagel zu Nagel gezogen; bei anderen sind die Hilfslinien so gezogen, dass der Nagel jeweils in der Mitte des Feldes sitzt. Auf diesen Brettchen werden mit verschiedenfarbigen Gummis Modelle geometrischer Figuren gespannt und hinsichtlich ihrer Eigenschaften untersucht. Die Gummibänder werden in verschiedenen Längen (bis 140 mm) benötigt.

Der Verfasser hat sich für das 9-Nagel-Brett ohne Hilfslinien entschieden. Es hat eine Kantenlänge von 15 cm, so dass 9 Felder von 5 x 5 cm entstehen. In der Mitte eines Feldes sitzt jeweils der Nagel. In den Seitenmitten befinden sich Steckmöglichkeiten, die eine Verbindung mehrerer Geobretter zu einer größeren Einheit ermöglichen.

Geobretter sind im Handel erhältlich. Man kann sie aber ohne allzu großen Arbeitsaufwand selber herstellen. Im Holzgeschäft werden aus einer 12 mm starken Sperrholzplatte 40 der 15 x 15 cm großen Brettchen zugeschnitten. Auf einem Brettchen zeichnet man die 9 Punkte genau ein (Abstand vom Rand 2,5 cm!) und schlägt 15 mm lange Nägel gerade durch, so dass sie auf der Rückseite 3 mm herausgucken. Nun dreht man das Brettchen herum und bringt an einer Ecke 2 Führungsbrettchen an (Abb.2). Mit dieser Lehre kann man die übrigen Brettchen jeweils mit einem Schlag anzeichnen. Die 9 Nägel (1,5 x 20, vernickelt) schlägt man 10 mm in die Brettchen. Die Nägel soll man nicht zu tief und gleich weit in das Holz treiben. Dazu werden die letzten Schläge für je 3 Nägel mit einem 10 mm starken Brettchen abgeschirmt. Damit sich in der Klasse die

gespannten Figuren gut vom Brettchen abheben, werden diese nicht lackiert, sondern naturbelassen oder höchstens mattiert.

Abgrenzung zu anderen Arbeitsmitteln

Der Geometrieunterricht in der Grundschule erfolgt von 2 Ansatzpunkten. Zum einen werden die Invarianten der geometrischen Abbildungen, zum anderen diese Abbildungen selber betrachtet. Das erste führt zunächst zu den sog. topologischen Invarianten (geschlossen, einfach, auf dem Rande liegend, im Inneren, ...), das andere führt zu den Kongruenzabbildungen (Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen). Dies ist in der Grundschule jedoch nur möglich, wenn die zusätzlichen Invarianten der Kongruenzabbildungen (Längen, Winkel, Flächen) durch das Arbeitsmaterial gebunden werden. Legespiele, Lochstreifen, Steckbretter u.ä. genügen dieser Forderung ebenso wie das Geobrett. Durch diese Bindung der Invarianten durch das Arbeitsmaterial wird aus der unendlichen Menge der möglichen Winkel, Längen und Flächen eine endliche (möglichst überschaubare) Anzahl von Möglichkeiten ausgesondert. Diese endlich vielen Möglichkeiten können und sollen dann allerdings auch analysiert werden.

Man kann fragen, warum zu der Fülle der angebotenen Arbeitsmittel für den Geometrieunterricht der Grundschule hier noch ein weiteres propagiert wird. Für den Verfasser sind hierfür u.a. folgende Gründe maßgebend:

Das Geobrett ist ein nicht sehr aufwendiges Arbeitsmittel, das auch in großen Klassen verwendbar ist, schnell verteilt und eingesammelt werden kann und verhältnismäßig wenig Arbeitslärm verursacht.

2. Die geometrischen Formen werden nicht durch Teilformen vorgegeben, sondern in den durch die Nägel begrenzten Möglichkeiten von den Kindern erzeugt.

3. Die einzelnen Ergebnisse sind schnell zusammenzutragen und der Klasse sichtbar zu machen, ohne dass etwas verrutschen kann; und damit ist

4. die Arbeit im Klassenverband besser möglich als bei vielen anderen Arbeitsmitteln.

5. Das zeichnerische Festhalten der Ergebnisse auf 9-Punkte-Feldern ist leichter möglich als das Nachzeichnen gelegter Figuren. Bei der Verbindung der Punkte wird die Benutzung des Lineals geübt.

6. Dieses 9-Nagel-Brett ist in der Vielzahl seiner Möglichkeiten immer überschaubar beschränkt; d.h. das Kind kann aufgefordert werden, grundsätzlich alle Möglichkeiten einer Aufgabenstellung zu erforschen und auszuschöpfen. Das Suchen aller möglichen Fälle, das Klassifizieren dieser Fälle, die Möglichkeiten der Fallunterscheidungen - was oft in der Fragestellung "Wie viele ..." deutlich wird - führt so zu einem forschenden Vorgehen, zu sinnvollen Strategiebildungen und systematischem Suchen von günstigen Lösungswegen.

Zur Unterrichtsorganisation

Die Brettchen werden paarweise Nagel gegen Nagel gestapelt und paarweise ausgegeben. Am Ende der Stunde werden sie jeweils am Zweiertisch vor dem Einsammeln wieder Nagel gegen Nagel zusammengelegt. Sollen die Kinder die Geobretter mit nach Hause nehmen, so müssen die Nägel mit einer Styroporplatte (15 x 15 cm) abgedeckt werden. Damit ist eine Verletzungsgefahr weitgehend ausgeschaltet.

Um die Ergebnisse des Einzelnen der Klasse sichtbar machen zu können, muss eine geeignete Stellfläche vorhanden sein, auf der möglichst 16 Geobretter nebeneinander Platz finden. Dazu kann man etwa das Kreidebrett einer Wandtafel benutzen. Stellt man hier jedoch mehr als 2 Brettchen übereinander, so kippen sie leicht nach vorn. Am

günstigsten ist eine leicht geneigte Stellfläche, deren Stellbrett sich in 110 cm Höhe befindet. Ist die Schülerzahl nicht zu groß, so bietet sich oft die Arbeit in Kreis-Sitzordnung an; die Arbeitsergebnisse werden dann auf den Fußboden gelegt.

Die gespannten Figuren sollen oft auf Punktfelder übertragen werden. Diese Punktfelder muss der Lehrer entsprechend der Aufgabenstellung vorbereitet haben. Man kann zunächst ein auf 6 x 6 cm verkleinertes Abbild des Brettchens anbieten und später auf 3 x 3 cm heruntergehen.

Aufbau der Sacheinheiten

Der folgende Aufbau ist am Unterricht im 3. - 7. Schuljahr orientiert. Er stellt ein Maximalprogramm dar (ohne die Möglichkeiten des Geobrettes zu erschöpfen), das an vielen Stellen kürzbar und in seinen Einzelteilen austauschbar ist. Die Inhalte sind dann natürlich nicht immer wörtlich zu übertragen, sondern müssen u.U. entsprechend anders aufgebaut werden. Im Einzelfall ist dann immer zu fragen, welche Voraussetzungen nicht erfüllt sind und zusätzlich mit erarbeitet bzw. gegeben werden müssen.

Eine Sacheinheit wird jeweils in einer Viergliederung dargeboten.

Im 1. Teil werden der Inhalt und die notwendigen mathematischen Grundlagen der Unterrichtseinheit aufgezeigt, wobei besonders bei den mathematischen Grundlagen kein systematischer Aufbau geboten werden soll. Mathematische Begriffe werden nur soweit geklärt, wie der Lehrer sie nach Meinung des Verfassers zur Verwirklichung des Unterrichts benötigt. Gewisse mengenalgebraische und geometrische Grundbegriffe werden als bekannt vorausgesetzt oder nur am Beispiel erläutert.

Im 2. Teil werden die Lernziele formuliert.

Im 3. Teil der Sacheinheit wird jeweils in Stichworten ein möglicher Stundenverlauf charakterisiert, der nur als Anregung und Vorstellungshilfe dienen soll.

Die im 4. Teil angebotenen schriftlichen Arbeitsanweisungen sollen nur bedingt von den Kindern selbständig durchgearbeitet werden. Sie sind in dieser Form frühestens im 5. Schuljahr einsetzbar. Sie bedürfen der Vorbereitung und Anleitung durch den Lehrer. Bei der Lektüre der einzelnen Kapitel sei dem Leser empfohlen, zunächst die Arbeitsanweisungen zu bearbeiten.

Die Anregungen in diesem Buch sind so vielfältig, dass es *unmöglich ist, alle Aufgabenstellungen im Unterricht durchzuführen*. Sie können getrost irgend eines der Themen an den Anfang stellen. Sie sollten jedoch dabei die Möglichkeiten des Geobrettes überschauen und die notwendigen Grundlagen jeweils bereitstellen. So ist es durchaus möglich mit dem Bruchbegriff bei den Flächen zu beginnen. Oder Sie behandeln die Dreiecke und kommen auf den Winkelbegriff. Lassen Sie die Schüler Vierecke durch Ziehen bestimmen und kommen so zum Flächenbegriff. Es ist möglich, das Geobrett zur Viereckslehre einzusetzen und mit der Klassifikation der Vierecke zu beginnen. Sie haben die Formeln für die Vierecke ohne die Bretter entwickelt? Warum verifizieren Sie diese nicht an den Beispielen der 16 + 10 möglichen Vierecke? Auf jeden Fall sollten Sie sich die Zeit nehmen und das Buch einmal von vorn bis hinten durchlesen. Die Mühe lohnt sich! Nur wenn Sie als Lehrer den Durchblick haben, werden Sie die Schüler für das Arbeitsmittel begeistern können.

Das Buch ist 1976 erschienen. Ich habe bei der Überarbeitung bewusst die historisch bedingte Betonung der mengenalgebraischen Aspekte (Teilmengen, Aussagen...) nicht herausgenommen. Sie sind meiner Ansicht für das mathematische Denken immer noch hilfreich. Wenn Sie nichts damit anfangen können... übergehen Sie diese Inhalte.

1. Mengenbildende Eigenschaften und Aussondern von Teilmengen (topologische Grundbegriffe)

1.1 Grundlagen

Auf dem Geobrett können wir mit einem Gummiband verschiedene Figuren spannen. Diese Figuren haben gewisse geometrische Eigenschaften, die in der Menge der gespannten Figuren Klasseneinteilungen bewirken. Es gilt nämlich immer: Entweder hat die Figur a die Eigenschaft e_1 oder die Figur a hat die Eigenschaft e_1 nicht. Es ist also möglich, aus einer Menge von bespannten Geobrettern solche Figuren zusammenzustellen, die "zusammenpassen"; d.h. wir suchen eine mengenbildende Eigenschaft und sondern die entsprechende Teilmenge aus. Diese Eigenschaft braucht dabei nicht immer sprachlich gefasst zu werden, sie kann durchaus im Präverbale bleiben. In jedem Falle wird aber dadurch ein Begriff "präfiguriert" (Bauersfeld).

Wir benutzen also ein Verfahren, das man in vielen Begabungstests zur Messung von gewissen Komponenten der Intelligenz benutzt, und glauben dadurch umgekehrt diese Komponenten zu stärken, d.h. den Schüler zu "begaben". Begriffe werden also oft durch Beispiele und Gegenbeispiele erzeugt. Dieses Verfahren des Aussonderns von Teilmengen ist bei den meisten Begriffsbildungen anwendbar und wird auch in diesem Lehrgang oft benutzt werden.

An dieser Stelle sind folgende Begriffspaare anzustreben: einfach - nicht einfach; geschlossen - nicht geschlossen. Eine Kurve (Figur) heißt "einfach", wenn sie doppeltpunktfrei ist, wenn sie keine "Kreuzungen" bzw. keine "Verzweigungen" hat. Andernfalls heißt sie "nicht einfach".

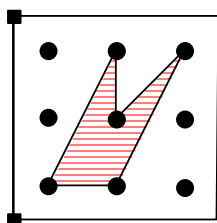


Abb. 1 Einfache Figuren (keine Verzweigung)

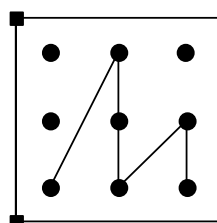
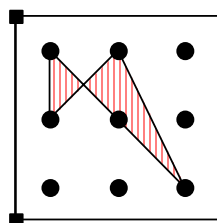


Abb. 2 nicht einfache Figuren

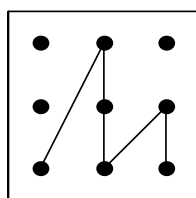
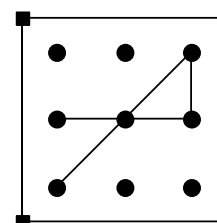


Abb. 3 geschlossene Figuren

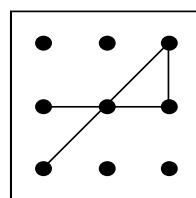
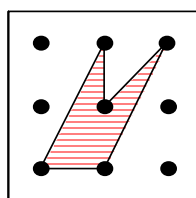


Abb. 4 nicht geschlossene Figuren

Wir nennen eine Figur "geschlossen", wenn man sie so endlos durchfahren kann, dass man an keiner Stelle die Richtung um 180° ändern muss, d.h. wenn die Figur keinen "Endpunkt" hat. Andernfalls heißt sie "nicht geschlossen".