

Gert Kadunz
Rudolf Sträßer

Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I

dritte, korrigierte Auflage

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Inter-
net über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek
The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nation-
albibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at
<http://dnb.d-nb.de>.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek
La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deuts-
che Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être
consultées sur Internet à l'adresse <http://dnb.d-nb.de>.

Gert Kadunz, Rudolf Sträßer:
Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I
3. korrigierte Auflage
ISBN 978-3-88120-376-1

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der
Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder
Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zu-
stimmung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen
gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie
oder irgendein anderes Verfahren als auch für die Übertragung auf Filme,
Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien

2009 by Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Vorwort

Ein Buch zur „Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I“ zu schreiben kann zunächst einmal mutig erscheinen. Nach längerem Zögern hat einer der Autoren dieses Unterfangen in Angriff genommen, weil er einerseits mehrfach Vorlesungen mit diesem Titel zu halten hatte. Dabei fiel der Mangel an einem grundlegenden Buch für die Studierenden umso mehr auf, als das Buch mit gleichem Titel von Gerhard Holland bald vergriffen und damit den Studierenden schwer zugänglich war. Andererseits kann man an dem nun vorliegenden Buch feststellen, dass für die Autoren dieses Buches Didaktik der Mathematik wesentlich durch die wissenschaftliche Untersuchung des Verhältnisses von Mathematik und ihren Nutzern gekennzeichnet ist. In Schulen betrifft dies vor allem Lehrende und Lernende. Ein Buch zur Didaktik der Geometrie mit dieser Blickrichtung ist bisher unseres Wissens nicht erschienen. Das nun vorliegende Buch zeugt auch von den Schwierigkeiten solcher Bemühungen.

Das Buch umfasst drei Kapitel. Das erste, einleitende Kapitel beschäftigt sich vor allem mit der Geometrie und ihrer Rolle in Schule und Gesellschaft. Geometrie erweist sich dabei als ein für die Entwicklung der Fachdisziplin Mathematik bedeutsames Teilgebiet. Gleichzeitig lässt sich schon aus der Geschichte lernen, wie vielfältige Anwendungen der Geometrie das alltägliche Leben beeinflussen. Schaut man auf gegenwärtige Verwendungen von Mathematik, so spielt Geometrie in industriellen Produktionsprozessen, wie der Verteilung und Verwaltung der Güter eine zentrale Rolle. Ein erster Blick in Schulbücher und Lehrpläne zeigt zusätzlich Facetten des Unterrichtsthemas Geometrie. In kursorischen Übersichten wird dann der Blick der Lehrenden auf die Geometrie dem der Lernenden gegenübergestellt.

Das zweite Kapitel behandelt wesentliche Inhalte und Tätigkeiten des Geometrie-Unterrichts der Sekundarstufe I. Dabei wird keine Vollständigkeit bezüglich der mathematischen Themen angestrebt. Stattdessen werden die drei wesentlichen Tätigkeiten des Geometrie-Unterrichts in ihren verschiedenen Facetten anhand von schulgeeigneten Beispielen erklärt und untersucht. Konstruieren, Beweisen und das Bilden und Ordnen von Begriffen und Theorien werden so Gegenstand dieses Kapitels. Entsprechend der Bedeutung der Anwendungen der Geometrie widmet sich ein gesonderter

Abschnitt diesem Thema. Wir stellen Beispiele vor, wie sie in der Sekundarstufe-I behandelt werden könnten. Dabei zeigt sich, dass für die großen Themen der Geometrie (nämlich Figuren, Abbildungen) schulgeeignete Anwendungen angegeben werden können. Hinweise zum Auffinden weiterer Geometrie-Anwendungen schließen dieses Kapitel ab.

Ein durchgängiges Thema vor allem des zweiten Kapitels ist der Einsatz von Software beim Lehren und Lernen von Geometrie. Die Mehrzahl der Beispiele des Buches bezieht sich auch auf Dynamische Geometrie Software (DGS). Die meisten der Abbildungen des Buches sind mit einer markt-gängigen DGS gezeichnet, nämlich mit Cabri II+. Die Autoren des Buches sind der Meinung, dass Überlegungen zum gegenwärtigen und zukünftigen Geometrie-Unterricht gerade der Sekundarstufe I die Existenz und den Einsatz solcher und anderer Programme nicht vernachlässigen können. Wenn dann auch CAD-nahe Programme besprochen werden, blicken wir wieder über den engen Horizont der bundesdeutschen Schule hinaus.

Das dritte Kapitel zieht mit seiner Thematik die Konsequenz aus unserer Sicht von Didaktik der Mathematik. Es versucht, an ausgewählten empirischen Untersuchungen zu zeigen, was man über die Auseinandersetzung von Lernenden mit der Geometrie weiß. Die menschliche, speziell die Lerner-Seite des Geometrie-Unterrichts wird an Beispielen (Raumgeometrie, Elementargeometrie, Satzgruppe des Pythagoras, Beweisen) behandelt. Ein Anhang zu Dynamischer Geometrie Software beschließt das Buch, nicht ohne auch hier wieder gesondert auf das Verhältnis von Lernenden und DGS einzugehen.

An wen richtet sich das Buch? Zunächst haben wir das Buch geschrieben, um Studierenden im Lehramt Mathematik beider Sekundarstufen einen vertieften Einblick in die Geometrie anzubieten, die nach unserer Meinung ein faszinierendes Unterrichtsthema ist. Nach Lektüre des Buches sollten Studierende in der Lage sein, kompetent über Planungen zum Geometrie-Unterricht zu urteilen. Sie sollten wesentliche Gesichtspunkte kennen, nach denen solcher Unterricht geplant werden kann. Die Ausführungen des Buches können eine solche Unterrichtsplanung unterstützen und auf fachliche Möglichkeiten des Unterrichts hinweisen. Wir hoffen, einige Beispiele im Buch vorzustellen, die nicht immer Allgemeingut der Lehrerschaft sind.

In diesem Sinne können auch Lehrerinnen und Lehrer im Schuldienst, Lehrplan-Gestalter und Schulbuch-Autoren dieses Buch mit Gewinn lesen. Im Übrigen mag es eine Sicht auf die Geometrie und das Geometrie-Lehren und -Lernen eröffnen, die jeder an Geometrie interessierten Person neue Perspektiven zu diesen vielgestaltigen Themen eröffnet.

Ein Buch wie das vorliegende ist nicht ohne die Unterstützung einer großen Zahl von höchst unterschiedlichen Personen und Institutionen möglich. Das Thema ist so tief in unseren Alltag und in die Berufswelt der Autoren verwoben, dass wir im Folgenden gewiss Menschen und Institutionen vergessen, denen wir für die Hilfe beim Schreiben dieses Buches danken sollten. Für Versäumnisse in dieser Hinsicht bitten wir um Entschuldigung. Jedenfalls gilt unser Dank den Universitäten Gießen und Klagenfurt und unseren dortigen Heimatinstitutionen. Sie haben uns Zeit gelassen und Ressourcen zur Verfügung gestellt, um dieses Buch zu schreiben. Ohne die besonders intensiven, gemeinsamen Schreibphasen an der Klagenfurter Universität hätten wir dieses Buch nicht fertigstellen können. Auch die nicht nur bibliothekarische Hilfe aus der Bielefelder und Gießener Universität ist gesondert zu nennen. Ohne die schnelle Versorgung mit Belegliteratur aus Bielefeld, meist durch Frau Herta Ritsche vermittelt, wären das Buch inhaltsärmer und die Literaturliste am Ende kürzer ausgefallen. Dank gebührt auch Mathias Hattermann, der uns mit Sorgfalt und Geduld bei der Endredaktion zur Seite stand.

Am Ende des Schreibprozesses können wir nur noch alle verbliebenen Fehler und Unklarheiten auf uns nehmen und die Leserinnen und Leser des Buches bitten, uns auf Möglichkeiten der Verbesserung dieses Werkes hinzuweisen.

Klagenfurt, im November 2007

Gert Kadunz und Rudolf Sträßer

Vorwort zur zweiten, korrigierten Auflage

In der vorliegenden zweiten Auflage haben wir einige Änderungen vorgenommen, die nahezu vollständig Hinweisen unserer Leserinnen und Leser, insbesondere von Lothar Profke, folgen. Wir danken unseren aufmerksamen Leserinnen und Lesern und nehmen weiterhin für verbliebene Fehler die Verantwortung auf uns.

Klagenfurt, im August 2008

Gert Kadunz und Rudolf Sträßer

Vorwort zur dritten, korrigierten Auflage

In der dritten Auflage haben wir einige Fehler korrigiert, die uns bekannt geworden sind. Außerdem wurde im dritten Kapitel an verschiedenen Stellen neu erschienene Literatur eingearbeitet und das Literaturverzeichnis entsprechend ergänzt. Im Anhang zur Dynamischen Geometrie Software haben wir neuere Entwicklungen in diesem Software-Typ angesprochen.

Klagenfurt, im August 2009

Gert Kadunz und Rudolf Sträßer

Inhaltsverzeichnis

1	Umfeld und Akteure des Geometrie-Unterrichts	1
1.1	Gesellschaftliche Rolle von Geometrie und Grafik	1
1.2	Ziele und Inhalte in Lehrplänen der Sekundarstufe I	6
1.3	Geometrie in den Schulbüchern der Sekundarstufe I	15
1.4	Sicht der Lehrenden auf schulische Geometrie	19
1.5	Sicht der Lernenden auf schulische Geometrie	25
2	Inhalte und Tätigkeiten des Geometrie-Unterrichts	31
2.1	Konstruieren	31
2.1.1	Darstellung / Grundkonstruktionen / Makros	31
2.1.2	Zeichnung und Figur – Konstruierbarkeit	39
2.1.3	Lösungen von Konstruktionsproblemen	47
2.1.4	Zeichenprogramme - CAD - DGS	50
2.1.5	Konstruieren in der räumlichen Geometrie	61
2.2	Argumentieren – Beweisen – Axiomatik	69
2.2.1	Argumentieren und Beweisen	69
2.2.2	Finden von Beweisen	75
2.2.3	Darstellen von Beweisen	87
2.2.4	Spezielle Beweismethoden	97
2.2.5	Computer-gestützte Beweise	103
2.2.6	Beweis und Module	110
2.3	Entdecken – Problemlösen – Ordnen	118
2.3.1	Problemlösen und entdeckendes Lernen	118
2.3.2	Begriffe in der Geometrie	134
2.3.3	Reichweite einer Theorie und "lokales Ordnen"	151
2.3.4	Axiomatik	159
2.3.5	Abbildungsgeometrie - Kongruenzgeometrie	168

2.4	Anwendungen der Geometrie im Unterricht	177
2.4.1	Gotisches Maßwerk	178
2.4.2	Inversor von Peaucellier und andere Gelenk-Mechanismen	185
2.4.3	Praktische und schöne Wiederholung: Bandornamente	187
2.4.4	Verwendung von Geometrie und Quellen dazu	191
3	Schüler und Geometrie-Unterricht: Empirie	195
3.1	Schüler und Geometrie–Unterricht: Übersicht	195
3.2	Schüler und Raumgeometrie	199
3.3	Schüler und Elementare Geometrie	206
3.4	Schüler und Berechnungen: Satz des Pythagoras	215
3.5	Schüler und Beweisen	226
	Anhang	239
	Dynamische Geometrie Software (DGS)	
	Literatur	253
	Register	275

1 Umfeld und Akteure des Geometrie-Unterrichts

In diesem ersten Kapitel unseres Buches sollen einige allgemeine Informationen und Aussagen zum Lehren und Lernen von Geometrie vor allem in der Sekundarstufe I zusammengetragen werden. Weitgehend unabhängig vom Unterricht in allgemeinbildenden Schulen wird zunächst ein Bild von der Rolle der Geometrie in Beruf und Alltag entwickelt, wobei sich die Unterscheidung von „relationaler“ und „deskriptiver“ Geometrie als hilfreich erweist. Lehrpläne und Schulbücher werden als zentrale Bestimmungsfaktoren des schulischen Geometrie-Unterrichts angesehen, sodass die Vorgaben und Vorschläge in diesen beiden Dokumenten genauer studiert werden. Lehrende und Lernende sind die beiden wesentlichen Akteure des Geometrie-Unterrichts. Die Sichtweisen dieser beiden Personengruppen auf diesen Unterricht werden in den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels dargestellt.

1.1 Die gesellschaftliche Rolle von Geometrie und Grafik: „relationale“ und „deskriptive“ Geometrie

Zu einem besseren Verständnis von Lehren und Lernen von Geometrie trägt gewiss ein Nachdenken über Geometrie und ihre Rolle in Gesellschaft, Schule und Wissenschaft bei. Dies soll in diesem Kapitel geschehen.

Dabei scheint die Frage nach der Rolle der Geometrie in den Wissenschaften - vor allem in der Wissenschaft Mathematik - einfach zu beantworten zu sein. Die Geometrie wurde lange Zeit als Mittel zur mathematischen Analyse des uns umgebenden Raumes angesehen und war also solche über Jahrtausende hinweg von eminenter praktischer Bedeutung. Viele Wissenschaftshistoriker sehen hier den Ursprung der Geometrie, wenn sie die Erfindung oder Entdeckung der geometrischen Denkweise auf die Notwendigkeit wiederholbarer Landvermessung im alten Ägypten zurückführen, wo alljährlich nach der Überflutung fruchtbaren Landes an den Ufern des Nils dieses Land neu zu vermessen war, um Bebauungsrechte und damit wirtschaftliche Chancen zu verteilen. Neben diesen Fragen der Landvermessung war außerdem die

Berechnung von Hohlmaßen von Körpern wichtig, damit die Richtigkeit von Steuerzahlungen in Naturalien überprüft werden konnte. Allgemeiner formuliert dies Becker: „Zunächst ist grundlegend zu bemerken, dass die gesamte vorgriechische Geometrie keine „reine“ oder „freie“, sondern „angewandte“ Wissenschaft ist, nämlich die „Kunst“ der Berechnung und Messung von räumlichen Dimensionen, Flächen- und Rauminhalten u. dgl. ...“ (vgl. Becker 1975, S. 18; die in Gericke 1992, S. 55ff, untersuchten Geometrie-Aufgaben bestätigen diese Einschätzung nachdrücklich).

In der Geschichte hat die Geometrie als Teilgebiet der Wissenschaft Mathematik für diese Wissenschaft eine Sonderrolle gespielt. Schon vor mehr als zwei Jahrtausenden haben „Mathematiker“ im antiken Griechenland damit begonnen, den Ursprung der Geometrie von der gesellschaftlichen Nutzung abzustreifen und eine Geometrie aufzubauen, die von den praktischen Ansprüchen des alltäglichen Lebens abgesondert war (für eine kurze Schilderung dieses historisch einmaligen Ablöseprozesses vgl. etwa Heilbron 1998, S. 1 ff.). Unter den besonderen sozialen und philosophischen Bedingungen des antiken Griechenland entwickelte sich neben einer an der Lösung praktischer Fragen interessierten Geometrie der Versuch, dieses Wissensgebäude unabhängig von praktischen Erfordernissen als Netz von Aussagen aufzubauen, welches sich auf möglichst wenige Grundtatsachen stützt. Diese Bemühungen fanden einen ersten Abschluss in dem dann zwei Jahrtausende lang eingesetzten, immer wieder ab- und umgeschriebenen Lehrbuch, den „Elementen“ des Euklid (Nachdruck 2003). In diesem grundlegenden Werk fand sich auch die „Provokation“ des ungewöhnlich komplizierten „Parallelen-Postulates“, mit dem sich Mathematiker und Philosophen rund zwei Jahrtausende lang auseinandersetzten, bis mit den „nicht-euklidischen“ Geometrien klar wurde, dass die Beziehungen zwischen geometrischen Aussagen und uns umgebender Welt nicht im Sinne einer einfachen Abbildtheorie gedacht werden können. Geometrie liefert demnach nicht einfach eine eindeutige mathematische Beschreibung der uns umgebenden Welt, sondern zeigt uns Möglichkeiten, ohne Widersprüche unsere Sinneseindrücke auszudrücken. Felix Klein hat letztlich die Geometrie als Invariantentheorie über einer Grundmenge formuliert, als ein Gefüge von Aussagen, die sich nicht verändern, wenn auf die Grundmenge bestimmte