

Peter Borneleit  
Peter Kirsche  
Reinhard Strehl  
(Hrsg.)

slm  
studium und lehre  
mathematik

Gerhard Holland

# **Geometrie in der Sekundarstufe**

Entdecken - Konstruieren - Deduzieren  
Didaktische und methodische Fragen

3. neu bearbeitete und erweiterte Auflage

franzbecker

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.d-nb.de>.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek

La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet à l'adresse <http://dnb.d-nb.de>.

Gerhard Holland

Geometrie in der Sekundarstufe

Entdecken - Konstruieren - Deduzieren

Didaktische und methodische Fragen

ISBN 978-3-88120-338-8

Reihe slm: studium und lehre mathematik

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren als auch für die Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien

2007 by Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

---

# Vorworte

## Aus dem Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch ist ein *Lehrbuch*, das aus Vorlesungen zur Didaktik der Geometrie für Lehrerstudenten der Sekundarstufe I an der Universität Gießen entstanden ist. Folglich richtet es sich in erster Linie an Lehrerstudenten und Lehrer an allgemein bildenden Schulen. Insbesondere werden auch Gymnasiallehrer angesprochen, von denen die meisten während ihres Studiums in den mathematischen Fachbereichen keine adäquate Ausbildung in Elementargeometrie und ihrer Didaktik erhalten haben.

Auf eine enzyklopädische Gesamtbehandlung der *Didaktik der Geometrie* wird bewusst verzichtet. Vielmehr spiegelt das Buch diejenigen Schwerpunkte der Geometriedidaktik wider, die das besondere Interesse des Verfassers im Zeitraum zwischen 1975 und 1985 gefunden haben. Unter der Leitfrage nach den Möglichkeiten zur Realisierung von Prozesszielen wird ausführlich eingegangen auf Aktivitäten des Beweisens, des Konstruierens, des entdeckenden Lernens, des Problemlösens und des Begriffserwerbs. Zu diesen Aktivitäten möchte das Buch dem Lehrer didaktische und methodische Kategorien an die Hand geben, die es ihm gestatten, sein Handeln zu reflektieren und auf rationale Entscheidungen zu gründen.

Gießen, Juni 1988

## Vorwort zur 3. Auflage

Meinem Kollegen *Reinhard Strehl* als einem der drei Herausgeber dieser Reihe und dem Entgegenkommen des Verlages *Franzbecker* ist es zu danken, dass die »Geometrie in der Sekundarstufe« nach beinahe 20 Jahren des Erscheinens der Erstauflage – nunmehr in 3. Auflage – noch einmal als Buch herauskommt. Die sich an Prozesszielen des Geometrieunterrichts orientierende Konzeption des Buches hat vermutlich durch die TIMM- und PISA-Studien eher eine Bestätigung erfahren, so dass diese Konzeption heute erst recht aktuell ist.

Für die Neubearbeitung wurden die Kapitel »Ziele, Inhalte und Stoffanordnung« und »Entdeckendes Lernen« ohne größere Änderungen aus den vorhergehenden Auflagen übernommen. Das ehemalige Kapitel »Begriffserwerb« wurde durch die drei neuen Kapitel »Figuren und Relationen«, »Messen und Berechnen« und »Abbildungen« ersetzt. Hier wurde – soweit erforderlich – auch auf den mathematischen Hintergrund eingegangen. Dasselbe

gilt auch für das Kapitel »Beweisen«. Hier wurden die Unterkapitel zur Spiegelungs- und Vektormethode gestrichen, da diese Methoden für den Geometrieunterricht in der Sek I nicht mehr relevant sind. Das Kapitel »Konstruieren« wurde unter Berücksichtigung dynamischer Geometriesysteme als Zeichenmedien völlig neu geschrieben. Hier wird zu einer normierten Darstellung von Konstruktionsprogrammen auf die Syntax des vom Verf. entwickelte Geometriesystem GEOLOG<sup>1</sup> Bezug genommen. In dem umfangreichen letzten Kapitel »Problemlösen« wird nunmehr ausführlich auf das computerunterstützte Lösen von geometrischen Interpolationsproblemen mit GEOLOG eingegangen.

Alle Bilder wurden neu angefertigt. Da diese mit GEOLOG erstellt und als Screenshots gespeichert wurden, ließen sich gezackte Linien nicht vermeiden. Das wird Ästheten mehr stören, als Mathematiker, die ja in den Bildern von Geraden und Kreisen ohnehin die idealisierten Objekte sehen.

Mit der Adressierung »LehrerInnen« sind sowohl Lehrerinnen als auch Lehrer gemeint. Wenn im Singular von der »Lehrerin« die Rede ist, so mögen sich bitte auch *Lehrer* angesprochen fühlen.

Dank sei allen Kolleginnen und Kollegen, die mir ihr Bedauern nach dem Ausverkauf der 2. Auflage mitgeteilt und mich dadurch ermuntert haben, eine Neubearbeitung nochmals zu wagen.

Gießen, Januar 2007

*Gerhard Holland*

---

1 Wenn Sie GEOLOG (Version 2006) ausprobieren möchten, holen Sie es sich kostenlos von meiner Homepage. Geben Sie einfach »Gerhard Holland GEOLOG« in die Suchmaschine.

---

# Inhalt

<b>Vorworte.....</b>	<b>5</b>
<b>Einleitung.....</b>	<b>13</b>
<b>1 Ziele-Inhalte-Stoffanordnung.....</b>	<b>16</b>
1.1 Ziele des Geometrieunterrichts.....	16
1.1.1 Inhaltsziele.....	16
1.1.2 Prozessziele.....	16
1.2 Aspekte der Geometrie.....	19
1.2.1 Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum.....	19
1.2.2 Geometrie als deduktive Theorie.....	21
1.2.3 Geometrie als Übungsfeld für Problemlösen.....	22
1.2.4 Geometrie als Vorrat mathematischer Strukturen.....	22
1.2.5 Bedeutung der Aspekte für den Geometrieunterricht.....	24
1.3 Inhalte des Geometrieunterrichts.....	25
1.4 Orientierung an einer Hintergrundtheorie.....	27
1.5 Lehrstoffanalyse und Lehrzielauswahl.....	31
1.5.1 Operationalisierung von Lehrzielen.....	31
1.5.2 Zur technischen Durchführung einer Lehrstoffanalyse.....	32
1.5.3 Kriterien zur Auswahl von Lehrzielen.....	35
1.6 Strukturierung des Lehrstoffs.....	37
1.6.1 Das Curriculum als Sequenz von Lerneinheiten.....	37
1.6.2 Systemorientierte Lehrstoffsequenzierung.....	38
1.6.3 Am Lernprozess orientierte Lehrstoffsequenzierung.....	38
1.6.4 Strukturierung mit Hilfe von Lernhierarchien.....	38
1.6.5 Sequenzierungen eines Themenblocks.....	41
1.6.6 Spiralige Strukturierung des Lehrstoffs.....	43
<b>2 Figuren und Relationen.....</b>	<b>45</b>
2.1 Figurenbegriffe.....	45
2.1.1 Figuren als Punktmenge.....	45
2.1.2 Beispiele für Figurenbegriffe.....	46
2.2 Relationen.....	46
2.2.1 Zweistellige Relationen.....	46
2.2.2 Funktionen als spezielle Relationen.....	48
2.2.3 Dreistellige Relationen.....	49
2.2.4 Konfigurationen.....	50
2.3 Definieren von Begriffen.....	51

2.3.1 Beziehungen zwischen Begriffen.....	51
2.3.2 Begriffshierarchie.....	52
2.3.3 Definition eines Begriffs aus einem Oberbegriff.....	52
2.3.4 Definition eines Figurenbegriffs über einen Funktionsterm.....	53
2.4 undefinierte Begriffe.....	55
2.4.1 Punkte und Geraden.....	55
2.4.2 Anordnung.....	55
2.4.3 Orientierung.....	55
2.5 Begriffserwerb im Geometrieunterricht.....	57
2.5.1 Zum Begriff der Figur.....	57
2.5.2 Konstruktiver Begriffserwerb.....	58
2.5.3 Begriffserwerb durch Spezifikation aus einem Oberbegriff.....	58
2.5.4 Begriffserwerb durch intensionale Abstraktion.....	60
2.5.5 Begriffserwerb durch Idealisierung und Kompletierung.....	61
2.5.6 Erwerb der ersten geometrischen Begriffe.....	62
2.5.7 Begriffe der Anordnung und Orientierung.....	63
2.6 Stufen des Begriffsverständnisses.....	63
2.6.1 Inhaltliches Begriffsverständnis.....	63
2.6.2 Integriertes Begriffsverständnis.....	64
2.6.3 Formales Begriffsverständnis.....	64
2.7 Kongruenz und Ähnlichkeit.....	65
2.7.1 Definition mit Hilfe von Abbildungen.....	65
2.7.2 Kongruente Strecken und Winkel.....	67
2.7.3 Kongruente Vielecke.....	67
2.7.4 Kongruenz und Ähnlichkeit im Geometrieunterricht.....	68
<b>3 Konstruieren.....</b>	<b>69</b>
3.1 Zeichenmedien .....	69
3.1.1 Das klassische Zeichenmedium.....	69
3.1.2 Dynamische Geometriesysteme.....	69
3.2 Konstruktionen als Programme.....	70
3.2.1 Beispiel eines Konstruktionsprogramms.....	70
3.2.2 Eingabeoperationen und Konstruktionsoperationen.....	71
3.2.3 Messoperationen.....	73
3.2.4 Schnittpunktoperation.....	74
3.2.5 Modulares Konstruieren.....	75
3.3 Konstruieren mit einem DGS.....	76
3.3.1 Programmeingabe.....	76
3.3.2 Normierte Sprache für ein Konstruktionsprogramm.....	76
3.3.3 Wiederholtes Starten eines Programms.....	77

---

3.3.4 Zugmodus.....	78
3.3.5 Modulares Konstruieren mit einem DGS.....	78
3.3.6 Ortslinien erzeugen.....	79
3.4 Konstruktionsaufgaben.....	79
3.4.1 Aufgabenstellung und Lösungen.....	79
3.4.2 Konstruktionsaufgaben mit leerer Anfangskonfiguration.....	82
3.4.3 Gleichwertige Lösungsprogramme.....	82
3.4.4 Richtigkeit der Lösung einer Konstruktionsaufgabe.....	83
3.4.5 Existenzbeweise als Lösungen von Konstruktionsaufgaben.....	84
3.5. Konstruieren im Geometrieunterricht.....	86
<b>4. Messen und Berechnen.....</b>	<b>87</b>
4.1 Größen und Größenbereiche.....	87
4.2 Begriffserwerb bei Größenbegriffen.....	88
4.2.1 Größenvergleich.....	89
4.2.2 Zählen und Messen.....	90
4.2.3 Berechnen.....	91
4.3 Stufen des Begriffsverständnisses.....	93
4.3.1 Inhaltliches Begriffsverständnis.....	93
4.3.2 Integriertes Begriffsverständnis.....	93
4.3.3 Formales Begriffsverständnis.....	94
4.4 Winkelbegriff und Winkelmessung.....	94
4.4.1 Gerichteter Winkel.....	94
4.4.2 Ungerichteter Winkel als Zweiermenge seiner Schenkel.....	95
4.4.3 Ungerichteter Winkel mit Winkelfeld.....	96
4.4.4 Winkelbegriff im Geometrieunterricht.....	98
<b>5 Abbildungen.....</b>	<b>99</b>
5.1 Abbildungen der Ebene.....	99
5.1.1 Begriff der Abbildung.....	99
5.1.2 Verketteten zweier Abbildungen.....	100
5.1.3 Abbildungsgruppen.....	100
5.2 Definitionsmöglichkeiten für Abbildungsbegriffe.....	102
5.2.1 Definition durch Spezifikation aus einem Oberbegriff.....	102
5.2.2 Definition durch eine Konstruktionsvorschrift.....	103
5.2.3 Definition durch Verketteten von Abbildungen.....	104
5.3 Abbildungen im Geometrieunterricht.....	104
5.3.1 Die Rolle von Abbildungen im Geometrieunterricht.....	104
5.3.2 Zum allgemeinen Begriff der Abbildung der Ebene.....	106
5.3.3 Konstruktiver Begriffserwerb.....	108



5.3.4 Begriffserwerb durch Verketteten von Abbildungen.....	108
5.3.5 Begriffserwerb durch Spezifikation aus einem Oberbegriff.....	108
5.4 Stufen des Begriffsverständnisses.....	109
5.4.1 Inhaltliches Begriffsverständnis.....	109
5.4.2 Integriertes Begriffsverständnis.....	110
5.4.3 Strukturelles Begriffsverständnis.....	111
5.4.4 Formales Begriffsverständnis.....	112
5.5 Zum Erwerb spezieller Abbildungsbegriffe.....	113
5.5.1 Geradenspiegelung.....	113
5.5.2 Punktspiegelung.....	113
5.5.3 Verschiebung.....	114
5.5.4 Drehung.....	115
5.5.5 Kongruenzabbildung.....	115
5.5.6 Zentrische Streckung.....	117
5.5.7 Ähnlichkeitsabbildung.....	117
<b>6 Beweisen.....</b>	<b>118</b>
6.1 Geometrische Aussagen.....	118
6.1.1 Allgemeingültige Aussagen.....	118
6.1.2 Folgerungsbeziehung.....	119
6.2 Beweis und Beweisdarstellung.....	120
6.2.1 Beispiel eines Beweises.....	120
6.2.2 Listendarstellung eines Beweises.....	121
6.2.3 Beweisgraph.....	121
6.2.4 Beweislücken.....	122
6.2.5 Ausführlichkeit eines Beweises.....	123
6.2.6 Beispiel für einen fehlerhaften Beweis.....	124
6.2.7 Fallunterscheidung.....	125
6.3 Beweismethoden.....	126
6.3.1 Indirekte Beweise.....	126
6.3.2 Kongruenzmethode und Abbildungsmethode.....	128
6.4 Niveaustufen des Beweisens.....	131
6.4.1 Stufe des Argumentierens.....	132
6.4.2 Stufe des inhaltlichen Schließens.....	133
6.4.3 Stufe des formalen Schließens.....	135
6.5 Beweisaktivitäten im Geometrieunterricht.....	135
6.5.1 Beweisen unter dem Anwendungsaspekt der Geometrie.....	135
6.5.2 Beweisen unter dem deduktiven Aspekt der Geometrie.....	138
6.5.3 Beweisen unter dem Aspekt des Problemlösens.....	139
6.5.4 Beweisen lernen.....	139

---

6.6 Lokales Ordnen.....	140
6.6.1 Beweisanalyse.....	140
6.6.2 Äquivalenz zweier Definitionen.....	141
6.6.3 Reduktion eines Satzsystems.....	142
<b>7 Entdeckendes Lernen.....</b>	<b>144</b>
7.1 Lernsequenzen zum entdeckenden Lernen.....	144
7.1.3 Darbietendes und entdeckendes Lernen.....	144
7.1.2 Vergleich der beiden Unterrichtsformen.....	147
7.1.3 Weitere Beispiele für Lernsequenzen.....	148
7.1.4 Zusammenfassende Charakterisierung.....	151
7.2 Methoden zur Satz- und Beweisfindung.....	152
7.2.1 Induktive Satzfindung.....	152
7.2.2 Analyse einer Konfiguration.....	154
7.2.3 Lösen einer Konstruktionsaufgabe.....	157
7.2.4 Lösen einer Berechnungsaufgabe.....	161
7.2.5 Vergleich der Methoden.....	164
7.3. Aussagen über Ortslinien entdecken.....	165
7.3.1 Ortslinien und Ortslinienaussagen.....	165
7.3.2 Ortslinienaufgaben lösen.....	165
<b>8 Problemlösen.....</b>	<b>170</b>
8.1 Geometrische Problemaufgaben.....	170
8.1.1 Merkmale einer Problemaufgabe.....	170
8.1.2 Interpolationsprobleme.....	172
8.1.3 Interpolationsprobleme im Mathematikunterricht.....	174
8.1.4 Voraussetzungen für erfolgreiches Problemlösen.....	174
8.2 Computerunterstützung beim Problemlösen.....	177
8.2.1 Aufgabenorientierte Tutorsysteme.....	177
8.2.2 Lösungsprozess .....	178
8.2.3 Lehrermodus.....	179
8.2.4 Zum Einsatz von Tutorsystemen im Unterricht.....	179
8.3 Berechnungsprobleme.....	180
8.3.1 Beispiel eines Berechnungsproblems.....	180
8.3.2 Weitere Beispiele für Berechnungsprobleme.....	182
8.3.3 Nur mit Gleichungen lösbare Berechnungsprobleme.....	183
8.3.4 Deduktionsprozess bei Berechnungsproblemen.....	185
8.3.5 Lösungsmethoden für Berechnungsprobleme.....	185
8.3.6 Lösungsfindung durch Vorwärtsarbeiten.....	186
8.3.7 Lösungsfindung durch Rückwärtsarbeiten.....	188

8.3.8 Lösungsfindung durch Lösen eines Gleichungssystems.....	189
8.3.9 Motivation zum Lösen von Berechnungsaufgaben.....	190
8.3.10 Aufgabenklassen für das Problemlösetraining.....	191
8.4 Computerunterstützung bei Berechnungsaufgaben .....	192
8.4.1 Von GEOLOG unterstützte Berechnungsaufgaben.....	192
8.4.2 Lösungen des Experten.....	193
8.4.3 Schülerlösungen.....	194
8.5 Beweisprobleme.....	196
8.5.1 Der Beweisprozess und seine Darstellung.....	196
8.5.2 Beweisfindung durch Vorwärtsarbeiten.....	198
8.5.3 Beweisfindung durch Rückwärtsarbeiten.....	200
8.5.4 Beweisfindung durch Umstrukturieren.....	202
8.5.5 Beweisfindung durch Lösen eines Berechnungsproblems.....	205
8.5.6 Lösen eines Spezialfalls.....	206
8.5.7 Aufgabenklassen für das Lösen von Beweisproblemen.....	207
8.6 Computerunterstützung bei Beweisaufgaben.....	207
8.6.1 Von GEOLOG unterstützte Beweisaufgaben.....	207
8.6.2 Lösungen des Experten.....	208
8.6.3 Schülerlösungen.....	208
8.7 Konstruktionsprobleme.....	210
8.7.1 Analyse der Lösbarkeitsbedingungen.....	210
8.7.2 Lösungsfindung durch Fortlassen einer Bedingung.....	212
8.7.3 Ortslinienmethode.....	214
8.7.4 Lösung mit Hilfe einer Abbildung.....	216
8.7.5 Reduktion auf ein Berechnungsproblem.....	217
8.7.6 Konstruktionsprobleme im Geometrieunterricht.....	218
8.8 Computerunterstützung bei Konstruktionsaufgaben.....	219
8.8.1 Von GEOLOG unterstützte Konstruktionsaufgaben.....	219
8.8.2 Lösungsfindung des Konstruktionsexperten.....	220
8.8.3 Schülerlösungen.....	223
<b>Anhang.....</b>	<b>225</b>
Bezeichnungen.....	225
Literaturhinweise.....	227
Register.....	236

---

# Einleitung

Bei der Unterrichtsvorbereitung und im Unterrichtsprozess werden von der Lehrerin laufend Entscheidungen abverlangt, die sie nur dann rational begründbar fällen kann, wenn ihr die fachdidaktische Ausbildung geeignete Kriterien und eine gründliche Kompetenz zu ihrer Handhabung vermittelt hat. Ziel des Buches ist es, einige dieser Kompetenzen für den Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I herauszustellen und zu vermitteln. Im folgenden geben wir eine Übersicht über diese Kompetenzen mit Hinweisen auf entsprechende Kapitel des Buches. Sie werden jeweils einer Frage untergeordnet, die sich jede Lehrerin stellen sollte, wenn sie Geometrieunterricht (global oder lokal) vorbereitet.

## **1. Inhaltsanalyse**

- Welche Inhalte gehören zum Unterrichtsgegenstand?

*Kompetenzen:*

- ◆ Kenntnis des Geometriecurriculums, d.h., der einschlägigen Lehrpläne und Richtlinien (vgl. 1.3).
- ◆ Kenntnis verschiedener Schulbücher.

## **2. Sachanalyse**

- Welche sachlogischen Beziehungen bestehen zwischen Begriffen, Sätzen und Verfahren des Unterrichtsgegenstandes?

*Kompetenzen:*

- ◆ Kenntnis des mathematischen Hintergrundes des Unterrichtsgegenstandes.
- ◆ Fähigkeiten zum Formalisieren, Definieren, Beweisen und Axiomatisieren<sup>2</sup>.

## **3. Lehrstoffanalyse**

- Welche Inhaltsziele ermöglicht der Unterrichtsgegenstand und wie lassen sich diese operationalisieren?

*Kompetenzen:*

- ◆ Fähigkeit, zu einem Unterrichtsgegenstand Inhaltsziele zu formulieren und zu operationalisieren (vgl. 1.1.1 und 1.5.1).

---

<sup>2</sup> Diese Fähigkeiten sollte die mathematische Fachausbildung der Lehrerinnen und Lehrer bewirken.

#### **4. Prozesszielanalyse**

- Welche Möglichkeiten bietet der Unterrichtsgegenstand zur Realisierung von Prozesszielen?

*Kompetenzen:*

- ◆ Kenntnis von Prozesszielen des Mathematikunterrichtes (vgl. 1.1.2).
- ◆ Fähigkeit, einen Unterrichtsgegenstand in Hinblick auf seine Möglichkeit zur Realisierung von Prozesszielen zu befragen.

#### **5. Lehrzielauswahl**

- Nach welchen Kriterien lassen sich (mögliche) Inhalts- und Prozessziele bezüglich einer Lerngruppe auswählen?

*Kompetenzen:*

- ◆ Kenntnis von Kriterien, nach denen sich Inhaltsziele bewerten und auswählen lassen (vgl. 1.5).
- ◆ Kenntnis verschiedener *Aspekte von Geometrie* und ihrer Relevanz für die Gewichtung von Prozesszielen für die verschiedenen Leistungsgruppen und Schularten (vgl. 1.2).

#### **6. Lehrstoffsequenzierung**

- Nach welchen Kriterien lässt sich der Lehrstoff<sup>3</sup> sequenzieren?

*Kompetenzen:*

- ◆ Kenntnis verschiedener Prinzipien der Lehrstoffsequenzierung (vgl. 1.6).
- ◆ Fähigkeit zur Entwicklung geeigneter Lernsequenzen für den Lehrstoff.

#### **7. Methodische Gestaltung von Lernsequenzen**

- Welche Möglichkeiten zur methodischen Gestaltung von Lernsequenzen für die Inhaltsziele eines Lehrstoffs bieten sich an?

*Kompetenzen:*

- ◆ Fähigkeit, Lernsequenzen zum entdeckenden Lernen zu entwickeln (vgl. 7.1).
- ◆ Kenntnis verschiedener Methoden zur entdeckenden Satz- und Beweisfindung (vgl. 7.2).
- ◆ Kenntnis verschiedener Wege des Begriffserwerbs bei geometrischen Begriffen (vgl. 2.5, 4.2 und 5.3).

---

<sup>3</sup> Unter »Lehrstoff« verstehen wir hier den auf die zu realisierenden Inhaltsziele reduzierten Unterrichtsgegenstand.

### **8. Ausarbeitung von Lernsequenzen zum Problemlösen**

- Welche Möglichkeiten bietet der Geometrieunterricht zur Förderung der Fähigkeiten zum Problemlösen?

*Kompetenzen:*

- ◆ Kenntnis dessen, was man unter einem *Berechnungsproblem*, einem *Beweisproblem*, einem *Konstruktionsproblem* versteht (vgl. 8.3, 8.5 und 8.7).
- ◆ Kenntnis verschiedener heuristischer Methoden zum Lösen von Berechnungsproblemen, Beweisproblemen und Konstruktionsproblemen.
- ◆ Kenntnis geeigneter Aufgabenklassen zum Üben des Problemlösens.
- ◆ Fähigkeit zur methodischen Gestaltung von Übungsphasen zum Problemlösen.

Die hier angegebenen Kompetenzen beziehen sich nicht nur auf Geometrieunterricht, sondern können für jeden Mathematikunterricht Geltung beanspruchen. Für den Geometrieunterricht spezifisch sind die besondere Rolle, die das Beweisen und das Konstruieren spielen. Diese beiden Themen werden in eigenen Kapiteln ausführlich behandelt.

# 1 Ziele-Inhalte-Stoffanordnung

## 1.1 Ziele des Geometrieunterrichts

Ziele des Mathematikunterrichtes lassen sich klassifizieren in *Inhaltsziele* und *Prozessziele*.

### 1.1.1 Inhaltsziele

- ♦ *Inhaltsziele* beziehen sich auf spezielle mathematische Inhalte. Sie betreffen Kenntnisse von Begriffen, Sätzen, Formeln, Verfahren, Definitionen und Beweisen, sowie Fertigkeiten bei der einfachen Anwendung dieser Kenntnisse. Inhaltsziele sind kurzfristig realisierbar und leicht zu operationalisieren.

**Beispiele für Inhaltsziele zum Höhensatz des Euklid:**

- ♦ Wissen, was man unter der Hypotenuse und den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks versteht (Begriffskennntnis).
- ♦ Den Höhensatz kennen (Satzkennntnis).
- ♦ Mit Hilfe des Höhensatzes die Höhe aus den Hypotenusenabschnitten berechnen (Anwendung von Begriffs- und Satzkennntnis).
- ♦ Mit Hilfe des Höhensatzes ein gegebenes Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln (Kennntnis eines Verfahrens).
- ♦ Einen Beweis für den Höhensatz kennen (Beweiskennntnis).

### 1.1.2 Prozessziele

Prozessziele beziehen sich auf mathematische Aktivitäten – wie z.B. Beweisen, Konstruieren, Mathematisieren – und betreffen die *Fähigkeiten* zu derartigen Aktivitäten. Prozessziele sind zwar an Inhalte gebunden, aber ihre Realisierung ist nur durch Übung an vielen Inhalten – und daher nur längerfristig – möglich. Das Operationalisieren von Prozesszielen ist deshalb nicht ganz einfach.

Im folgenden wollen wir Prozessziele des Mathematikunterrichts unter Verwendung von sieben Kategorien klassifizieren. Dabei wird Vollständigkeit nicht angestrebt.