

Peter Borneleit
Peter Kirsche
Reinhard Strehl
(Hrsg.)

slm

Studium und Lehre
Mathematik

Reinhard Strehl

Sehen - Zeichnen - Konstruieren

Darstellende Geometrie,
Raumvorstellung
und Wahrnehmung

div verlag
franzbecker

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.dnb.de>.

Information bibliographique de la Deutsche Nationalbibliothek La Deutsche Nationalbibliothek a répertorié cette publication dans la Deutsche Nationalbibliografie; les données bibliographiques détaillées peuvent être consultées sur Internet à l'adresse <http://dnb.dnb.de>.

Reinhard Strehl

Sehen - Zeichnen - Konstruieren

ISBN 978-3-88120-337-0

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. § 53, § 54 UrhG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren als auch für die Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien.

© 2003 by Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Vorwort

ZU ZIELEN UND GEBRAUCH DES BUCHES

Was entworfen wird, soll sichtbar werden, ehe es gebaut wird. Für Architekten und Ingenieure ist die Darstellende Geometrie deshalb ein unverzichtbares Handwerkszeug, und Raumvorstellung ist eine Voraussetzung, mit diesem Handwerkszeug umzugehen.

Der vorliegende Band ist aber kein Lehrbuch zur Darstellenden Geometrie, das sich an bestimmte, technisch orientierte Berufsgruppen wendet. Es geht auch nicht um einen zusammenfassenden Bericht über die reichhaltigen Ergebnisse der Psychologie und Neurologie zum Thema Sehvorgang und Raumvorstellung, auch wenn einiges davon notwendigerweise angesprochen werden muss. Raumvorstellung wird zu den grundlegenden Intelligenzfaktoren gezählt, und Wahrnehmungsfähigkeit ist eine Voraussetzung unseres Denkens. Die Stichworte Raumvorstellung und Wahrnehmung im Titel des Buches besagen aber vor allem, dass durch die Beschäftigung mit der Frage, wie man das Bild eines Körpers skizziert und wie es konstruiert werden kann, besonders aber durch das eigene Zeichnen Raumvorstellung herausgefordert und gefördert werden soll und dass dabei auch unsere eigene Wahrnehmungsfähigkeit weiterentwickelt wird.

Wir wenden uns an Lehrer und Lehramtsstudierende, auch wenn Mathematik nicht ihr Schwerpunktfach ist. Manches hier Dargestellte kann auch unmittelbar in der Schule Verwendung finden. Es geht also

- um Training der Raumvorstellung durch aktiven Umgang mit den Möglichkeiten der Darstellung von räumlichen Objekten,
- um das Bewusstmachen räumlicher Beziehungen bei den einfachen Gegenständen der alltäglichen Umwelt und dadurch um eine Verbesserung der Wahrnehmungsfähigkeit, also des "Sehens" im Alltag,
- um die Beschäftigung mit dem Entstehen von Bildern und indirekt dadurch um die Stärkung der eigenen Vorstellungskraft sowie
- um Möglichkeiten der Darstellung von Körpern im Unterricht.

Die damit verbundenen praktischen Übungen im Zeichnen können ein einfacher und sinnvoller Zugang zur Geometrie sein und helfen, die leider weit verbreitete Scheu vor der Beschäftigung mit geometrischen Sachverhalten zu überwinden.

Die **Erzeugung ebener Bilder von räumlichen Objekten** - und das ist die Aufgabe der Darstellenden Geometrie - beruht in der Regel auf Projektionen, deren Eigenschaften in einschlägigen mathematischen Theorien sehr

genau untersucht sind. Doch entsprechend der Zielsetzung dieses Bandes wird nicht versucht, das Zeichnen zentralperspektivischer Bilder in die so genannte Projektive Geometrie einzubetten. Die anschauliche Vorstellung des Sachverhalts hat vielmehr Vorrang vor einer formalen Theorie.

Dennoch gibt es grundlegende Aussagen, die man sich einprägen sollte. Wir werden diese aber nicht als Axiome, Definitionen und Sätze durchnummerieren, sondern lediglich

- Begriffserklärungen und grundlegende Aussagen durch ein besonderes Zeichen hervorheben sowie
- ◆ Übungsaufgaben, die mit ihren Lösungen in den Text integriert sind, entsprechend kennzeichnen.

Der Leser ist an diesen Stellen mehr noch als sonst aufgefordert, mit Bleistift und Papier in der Hand zu lesen und immer wieder zu zeichnen, zu betrachten und zu zeichnen ... Mitunter geht es nur darum, eine Faustskizze anzufertigen, die aber für das gesteckte Ziel ebenso wichtig sein kann, wie manche aufwendige Konstruktion.

Umfangreichere Aufgaben sind so gewählt, dass alle den Buchtext begleitenden Konstruktionen bei Verdoppelung der Größe der Vorgaben noch auf einem DIN A4-Blatt ausführbar sind. Es genügt also, die wenigen Linien der Aufgabenseiten auf ein solches Zeichenblatt zu übernehmen oder die Aufgabenseiten zu kopieren und dabei nach Bedarf zu vergrößern. Für den Gebrauch in Lehrveranstaltungen sind am Ende der einzelnen Kapitel zusätzliche Aufgaben angegeben.

Intelligente Computerprogramme können zwar heutzutage manches Konstruktionsproblem automatisch lösen, doch ersetzen die so gewonnenen Bilder nicht die Übung der eigenen Vorstellungskraft, die durch das selbständige Konstruieren erzwungen wird. Dem steht nicht entgegen, dass der Computer als Hilfsmittel Einzelschritte wie das Zeichnen von Kreisen und Parallelen oder das Errichten von Senkrechten erleichtern kann. Auch die Grafiken dieses Bandes sind mit einem handelsüblichen Grafikprogramm gezeichnet und nicht wie einst mit Zirkel und Lineal.

Sich vorstellen zu können, wie ein Objekt beschaffen ist, es in Gedanken zu sehen und dann auch skizzieren oder bei Bedarf genau konstruieren zu können, das kann Wahrnehmung und Denken auf eine sehr befriedigende Weise bereichern. Wir hoffen, davon etwas vermitteln zu können.

Ein herzlicher Dank allen, die mit Rat, Kritik und Korrekturen geholfen haben. Das sind vor allem Frau D. Aßmus und Studierende in Lüneburg, meine Kollegen P. Borneleit und P. Kirsche und meine Frau.

Lüneburg, im Februar 2003

Reinhard Strehl

Inhalt

<i>I. Einführung</i>	
1. Handeln - Sehen - Raumvorstellung	9
2. Grundeigenschaften von Projektionen	13
3. Aspekte und Bedeutung der Darstellenden Geometrie	25
<i>II. Parallelprojektion</i>	49
1. Schrägbilder	50
1.1 Kavalier- und Vogelperspektive	52
1.2 Schrägbilder spezieller Körper	54
1.3 Der Kreis im Schrägbild	56
1.4 Schrägbild und natürliches Sehen - Grenzen der Schrägbilddarstellung	67
2. Orthogonale Mehrtafelprojektion	71
2.1 Grundlegende Begriffe und Konstruktionen	71
2.2 Schnitte und Durchdringungen	91
2.3 Wahre Größe und Gestalt von Strecken, Winkeln und Figuren - Abwickelungen	116
3. Ergänzende Übungen	140
<i>III. Zentralprojektion</i>	143
1. Sehvorgang und Zentralperspektive	143
2. Einführende Übungen	147
3. Grundlegende Konstruktionen	153
3.1 Punkt und Gerade in perspektivischen Darstellungen	153
3.2 Das perspektivische Bild einer Geraden - Fluchtpunkte	156
3.3 Die Abbildung einzelner Punkte der Standebene	159
3.4 Winkel zwischen Geraden der Standebene	163
3.5 Die Abbildung beliebiger Punkte, Strecken und Geraden im Raum	165
4. Mess- und Teilungspunkte - wahre Größe und Gestalt	174
5. Kreis und Kugel in perspektivischen Darstellungen	191

6. Zentralperspektive und orthogonale Mehrtafelprojektion	206
7. Perspektivische Darstellungen und natürliche Wahrnehmung	210
8. Ergänzende Übungen	239

Anhang

Literaturhinweise	242
Nachweis der Abbildungen	243
Symbole und Bezeichnungsweisen	243
Register	244

I. Einführung

1. HANDELN - SEHEN - RAUMVORSTELLUNG - AUFGABENSTELLUNG DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE

Wir leben in einem dreidimensionalen Raum, und unser Denken ist vom Anfang seiner Entwicklung an ganz wesentlich von Erfahrungen bestimmt, die auf Handlungen im Raum beruhen. Nichts zeigt dies deutlicher als unsere Sprache: Wenn wir sagen "überlegen", "durchdenken", "hinterfragen" oder "untersuchen", dann sind mit "über", "durch", "hinter", "unter" usw. räumliche Beziehungen angesprochen.

Aufbauend auf dem Handeln - angefangen von ersten Tasterfahrungen eines Kindes - ist das Sehen wohl die wichtigste Möglichkeit, die Welt zu erfahren, und die wichtigste Grundlage unseres Denkens. Auch hier gibt unsere Sprache einen Hinweis: Wir machen uns ein *Bild* von einem Sachverhalt, wenn wir beginnen, etwas zu begreifen. Wir sprechen von *Einsicht*, wenn etwas wirklich verstanden ist.

Handeln und Sehen bedingen also einander. "Man sieht, was man weiß." heißt es, und man weiß - auch wenn es nicht verbalisierbar ist - was man handelnd erfahren hat.

Doch die Welt der Bilder, die uns im Alltag umgeben, ist nicht räumlich sondern zweidimensional. Und auch die Bilder, die im Auge entstehen - genauer müsste man sagen: die Sinneseindrücke, aus denen unser Gehirn in einem sehr komplexen Prozess räumliche Vorstellungen schafft, beginnen mit einer Reizung der Netzhaut. Diese aber ist eine Fläche, in ihrer Funktion in grober Vereinfachung vergleichbar mit dem Fotopapier, das belichtet wird. Das Foto selbst oder die gegenständliche Zeichnung, die wir sehen, sind ebene Figuren, die räumliche Vorstellungen in uns wachrufen. Noch vor der Frage nach der Verarbeitung ebener Bilder zu räumlichen Vorstellungen im menschlichen Gehirn liegt also eine einfachere, aber dennoch bereits recht komplexe Frage:

Wie entsteht ein ebenes Bild eines räumlichen Objekts?

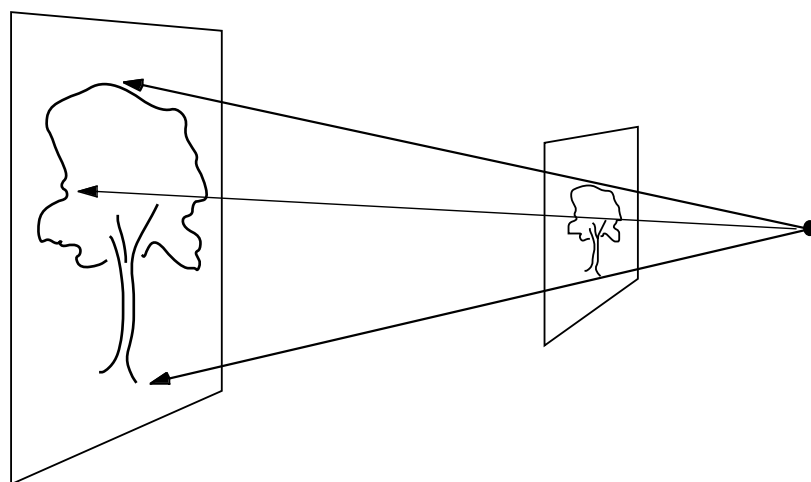
Dass dies überhaupt möglich ist, erfahren wir im Alltag. Ein Baum wirft bei Sonnenlicht einen Schatten, in dem wir den Baum wie in einem Bild erkennen können, wenn auch nur ungefähr in seinen äußeren Umrissen. Dieses einfache Beispiel zeigt zugleich den Weg, auf dem ebene Bilder entstehen können und in den weitaus meisten Fällen auch entstehen, nämlich durch **Projektion**. Die Lichtstrahlen der Sonne - für uns die physikalische Realisierung unserer Vorstellung von Geraden - ordnen Punkten im Raum wie z. B. der Spitze des Baumes Punkte auf der Fläche zu, auf die der Schatten fällt. Das Wort Projektion steht dabei ganz im Einklang mit der Bedeutung des lateinischen Wortstamms *werfen*: Ein beliebiger Gegenstand - der Baum, ein Haus, ein Tisch - *wirft* einen Schatten auf eine Wand oder auf die Fläche, auf der er steht. Der Projektor *wirft* ein Bild auf eine Leinwand.

Wenn wir andererseits eine Projektion als *Abbildung* bezeichnen oder wenn von projektiven Abbildungen gesprochen wird, so meint der allgemeinere mathematische Begriff Abbildung zunächst nur die eindeutige Zuordnung von Punkten des Raumes zu Bildpunkten, nicht aber die Bilderzeugung im engeren Sinne. Letzteres ist die Aufgabenstellung der Darstellenden Geometrie, nämlich die

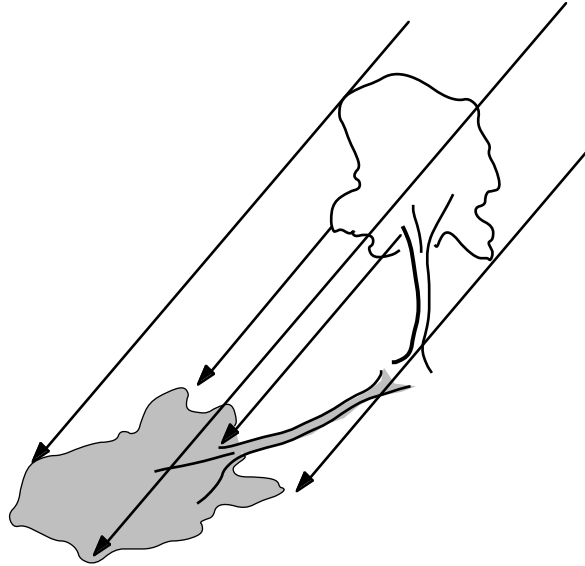
Konstruktion ebener Bilder von räumlichen Objekten.

Die einfachen Beispiele des Projektors und des Schattenwurfs zeigen zwei grundlegende Möglichkeiten, ein Bild durch Projektion zu erzeugen. Idealiert man die realen Vorgänge, so kann man sagen:

Die Lichtstrahlen bei Projektion eines Bildes auf eine große Leinwand gehen von einem Punkt, von einem *Zentrum*, aus. Man hat es also bei einer so bewirkten Bildvergrößerung mit einem einfachen Fall von **Zentralprojektion** zu tun.



Die Sonnenstrahlen, die einen Schatten werfen, sind parallel. Ein Bild, das nach Art des Schattenwurfs bei Sonnenlicht erzeugt wird, entsteht durch **Parallelprojektion**.



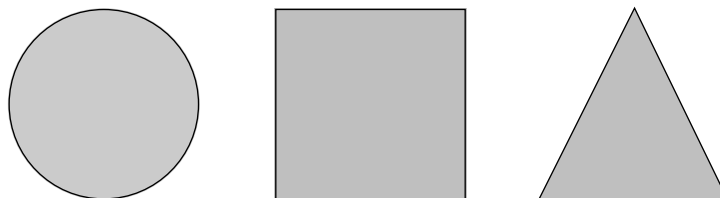
Im allgemeinen kann (durch eine Projektion) jedem Punkt des Raumes ein Punkt der (Bild-) Ebene zugeordnet werden. Die Abbildung ist aber nicht umkehrbar. Die unendlich vielen Punkte des Raumes, die von einem und nur einem Projektionsstrahl getroffen werden, haben alle denselben Bildpunkt.

Ein Bild enthält somit weniger an Information über den Gegenstand als der Gegenstand selbst. Konkreter: Die Fotografie vermittelt in den meisten Fällen ganz unmittelbar eine anschauliche Vorstellung vom Gegenstand, sie lässt aber wenig Genaueres erkennen in bezug auf Größenverhältnisse und Winkel des Objekts. Umgekehrt enthält eine technische Zeichnung meist eine Fülle von exakten Maßangaben, und die meisten Maße lassen sich der Zeichnung leicht entnehmen, wenn man nur den Maßstab beachtet. Es fällt aber oft schwer, sich vorzustellen, wie der Gegenstand aussieht. Ein Architekt zeichnet deshalb den Wohnungsgrundriss mit Maßen und eine Ansicht als Vorstellungshilfe. Allgemein kann man sagen:

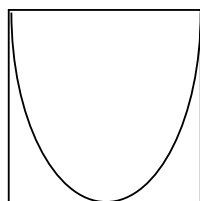
Mit wachsender **Maßgenauigkeit** nimmt (in der Regel) die **Anschaulichkeit** der Darstellung ab - und umgekehrt.

Um zu verdeutlichen, wie wenig anschaulich eine Darstellung sein kann, die zugleich aber alle wichtigen Maße des Objekts erfasst, wählen wir ein Beispiel, das ebenso einfach wie zugleich herausfordernd für das Vorstellungsvermögen ist:

- ◆ Stellen Sie sich einen Körper vor, von dem man im Gegenlicht nur die äußeren Umrisse, die Konturen, sehen kann. Er wird "genau", also senkrecht, von oben, von vorn und von der Seite betrachtet.



Aus diesen Bildern sind Höhe und Breite und auch die Form der Grundfläche zu erkennen. Doch was ist das für ein Körper? Hat er wirklich eine kreisförmige Grundfläche, oder scheint es nur so? Auch eine Kugel würde, frontal im Gegenlicht gesehen, als Kreis erscheinen. Der Leser ist aufgefordert, in beliebiger Weise eine Skizze des Körpers zu entwerfen, "so wie er aussieht". Dies kann nur gelingen, wenn seine Form erkannt ist:



Es ist ein kurzer, runder Keil. Zeichnet man die mittlere der drei Ansichten nicht als Schattenriss, sondern mit einer im Schatten nicht erkennbaren Kante, so fällt es leichter, sich den Körper vorzustellen. Wir können ihn nun auch in der hier zunächst bewusst wenig anschaulich gewählten Darstellung *wiedererkennen* und können ihn in Gedanken bewegen, drehen und wenden.

Das bedeutet: In unsere Vorstellung vom Objekt geht mehr ein, als im Bild enthalten ist. Die Konstruktion einer anderen Darstellungsmöglichkeit soll im Abschnitt über Schrägbilder genauer besprochen werden. (Vgl. S. 59.)

Die Aussage über das Verhältnis von Maßgenauigkeit und Anschaulichkeit in ebenen Bildern zeigt eine Grenze der Darstellenden Geometrie und erklärt zugleich die große Vielfalt ihrer Verfahren, die je nach Zielsetzung für die Anwendungen teils mehr der einen, teils mehr der anderen Forderung gerecht werden. Wir werden in diesem Rahmen nur die wichtigsten Verfahren der Darstellenden Geometrie genauer behandeln, nämlich einerseits Schrägbilder und Zweitafelprojektion, die in Schule und Alltag in zahlreichen Anwendungen von großer praktischer Bedeutung sind, und andererseits die zentralperspektivischen Darstellungen, die dem natürlichen Sehvorgang am nächsten kommen und somit anschauliche Bilder geben. Bei der Frage nach der Bedeutung der Darstellenden Geometrie und ihrer Rolle in anderen Disziplinen werden wir kurz auch andere Darstellungsmöglichkeiten ansprechen. Doch sollen zunächst in möglichst einfacher Weise die wichtigsten mathematischen Eigenschaften von Projektionen besprochen werden.