Zählen

Grundlage der elementaren Arithmetik

Thomas Bedürftig Roman Murawski

Ἀεί ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει.
(Ewig zählt der Mensch.)
Richard Dedekind, 1888

Vorwort

In diesem Buch geht es um das elementare Zählen. Das didaktische und mathematische Ziel ist, endliche Zählvorgänge und ihre Funktion im Aufbau des Rechnens zu verstehen. Das Interesse gilt daneben psychologischen, erkenntnistheoretischen und methodologischen Fragestellungen in diesem Bereich.

Die Darstellung ist streng zweigeteilt. Fast alle Punkte beginnen mit umgangssprachlichen didaktisch orientierten Analysen und schließen mit klein gedruckten mathematischen Formulierungen. Letztere liefern einen systematischen Hintergrund, in den die didaktischen Aussagen zurückverfolgt werden können. So enstehen nebeneinander ein didaktisches und ein mathematisches Gerüst für die elementare Arithmetik, dessen Fundament das Zählen ist.

Zwischen didaktischer Analyse und mathematischer Systematik gibt es eine mittlere, anschauliche Ebene, die konsequent entwickelt wird und den Text begleitet: Die Ebene der Pfeil- und Venndiagramme. Sie ist der „Boden“ für viele didaktische Analysen und die „Oberfläche“ der mathematischen Systematik. Es ist diese Ebene zusammen mit einer Reihe mathematischer Begriffe und Aussagen, die sich für die mathematische Lehre in der Lehrerausbildung über die Gegenstände des Buches anbietet.

Für das — didaktische wie mathematische — Sprechen in Mengenbegriffen (wie „Menge“, „Gegenstand“, „Zuordnung“, „Beziehung“) legen wir im Kapitel 2 ein für unseren endlichen Zweck geeignetes mathematisches Fundament — und finden dort als dessen Grundlage Zahlen und Zählen in mengenthoeretischer Form schon vor. Dies schützt vor dem Glauben, wir könnten Zählen und Zahlbegriff „begründen“.

Für eine *Übersicht* über die vielen Einzelpunkte, die wir behandeln, haben wir ein detailliertes Inhaltsverzeichnis geschrieben. *Weitere Information* über Methoden und Begriffe dieses Buches gibt die Einleitung. Für weitere und weitergehende Beschreibungen und Analysen von Zählvorgängen auf der Grundlage umfangreicher empirischer Untersuchungen verweisen wir auf das Werk *Children's Counting and Concept of Number* von Karen C. Fuson (1988). Eine knappe, fundierte Übersicht gibt F. Padberg in seiner *Didaktik der Arithmetik* (1992). Die wichtige Rolle, die das Zählen und zählende Strategien für Kinder im Aufbau des Rechnens und der frühen Erschließung der Umwelt spielen, ist in vielen empirischen Studien seit den grundlegenden Untersuchungen von R. Schmidt (1982) sowie von S. Schmidt und W. Weiser (1982) bestätigt worden. Das methodisch umfassende Projekt *mathe 2000* — gegründet und geleitet von E. Ch. Wittmann und G. Müller und orientiert am Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens — hat von Beginn an dem Zählen und der zählenden Erarbeitung der ersten Zahlenräume einen wichtigen Platz in der Entwicklung des Rechnens zugewiesen.

Es ist die Absicht dieses Buches, den Blick für das Zählen im Aufbau des Zahlbegriffs und der Arithmetik zu schärfen, *nicht* eine irgendwie geartete Zählmethodik zu propagieren. Das Zählen, das lange aus dem Blickfeld verschwunden war, hat längst wieder Fuß gefasst in den Methodiken des Anfangsunterrichts. Wir plädieren für einen notwendig komplexen und vielfältigen methodischen Zugang zu den vielen Facetten des Zahlbegriffs.

In der besonderen Aufteilung des Textes – in einen „deutschen“ und einen mathematischen Teil – verbirgt sich eine **Gebrauchs-**

anweisung für die Leserin und den Leser:

– Der umgangssprachliche Text ist in Normalgröße gedruckt – wie dieses Vorwort. Er ist an jeder Stelle leicht lesbar und setzt keine mathematischen Kenntnisse voraus. In 2.1 und in den Anhängen führt er umgangssprachlich bis an grundsätzliche mathematisch-methodische Fragen heran. Zusammen mit den Veranschaulichungen bietet der umgangssprachliche Text einen vollständigen und vollwertigen Überblick über die Gegenstände des Buches.

– Bei Bedarf oder Interesse kann die Leserin oder der Leser weiter in den mathematischen Teil vordringen, der klein gedruckt ist. Dort ist es möglich, die Zusammenhänge und Systematik tiefer und klarer zu studieren und Einsichten in die Grundlage unseres Denkens und Sprechens über Zählen und Zahlen zu gewinnen.

– Für weitergehende Nachfragen stehen drei Anhänge zur Verfügung, die wieder jeweils in einen allgemeinen und einen mathematischen Teil gegliedert sind: Anhang A behandelt den für unseren Ansatz fundamentalen Begriff der Endlichkeit. Der Anhang B hinterfragt die Methode dieses Buches: Wie kann man – speziell auch mit endlichen Mitteln – Zählen und Zahlen mathematisch begreifen? Wir stellen Methoden und tief liegende Ergebnisse aus den Mathematischen Grundlagen vor, die der Leser wieder nach Bedarf und Belieben mehr oder weniger weit verfolgen kann. Anhang C schließlich berichtet aus der Geschichte der Mathematik und charakterisiert philosophische und mathematische Versuche, das Wesen der Zahlen zu ergründen. Wir schlagen einen Bogen von den frühesten Aussagen im antiken Griechenland bis zu den Auffassungen im 19. und 20. Jahrhundert und versuchen schließlich, selbst eine Position zu beziehen.

Wir danken Frau Ingrid v. Engelhardt und Tobias Bröker (Hannover) für die sorgfältige Durchsicht des Textes und Axel Mittelberg (Hannover), der uns aus vielen Computer- und Textprogrammproblemen (LaTeX) half. Wir danken unseren Kollegen, die uns freistellten für unsere Arbeiten an diesem Buch. Wir danken dem Deutschen Akademischen Austausch Dienst (DAAD), der unsere Zusammenarbeit seit 1996 unterstützt. Wir danken der Alexander von Humboldt-Stiftung für die finanzielle Hilfe beim Druck.

Nicht zuletzt danken wir *Walter Felscher* (Tübingen), der uns schon vor Jahren bei Vorarbeiten unterstützte und dessen umfassendes und für unsere Gegenstände einzigartiges Werk *Naive Mengen und abstrakte Zahlen* (Bd. I – III, Mannheim 1978/79) uns als Hintergrund und Ratgeber für viele unserer mathematischen Arbeiten diente. Walter Felscher starb im Dezember 2000.

Thomas Bedürftig
Roman Murawski

Hannover und Poznań
im November 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es gibt viele Tätigkeiten, die wir pauschal mit „Zählen“ bezeichnen: Gegenstände zählen, um ihre Anzahl zu bestimmen, oder nach vorgegebener Anzahl Gegenstände abzählen, und Gegenstände zählen und sie dadurch ordnen. Kinder zählen, indem sie einfach Zahlworte aufsagen, sie zählen vorwärts und rückwärts, sie zählen von vorgegebener Stelle an weiter, sie zählen in Schritten, usw. Wir bemerken, dass alle diese Handlungen bedingt oder begleitet werden von einem Vers von Zahlworten oder einer Folge von Zahlzeichen.

Wir werden uns zuerst die Aufgabe stellen, diesen „Zählvers“, d.h. das *reine Zählen* oder den reinen *Zählprozess* zu beschreiben und seine Struktur zu verstehen. Es ist nicht lange her, da tat man den Zählvers als „sinnlos“ ab. Wir meinen, dass es gerade diese „Sinnlosigkeit“, sagen wir freundlicher die weitgehende *Bedeutungsfreiheit* ist, die das Zählen so fundamental und universell macht. Einen Einblick in die Weite des Begriffs des Zählens gibt der Punkt 1.3.

Wir wollen am Beispiel des Zählverses anschaulich die Methode der Analyse von Zählvorgängen demonstrieren, die immer dann stattfindet, wenn man — in didaktischer oder mathematischer Absicht — „mengenhaltige“ Begriffe verwendet. Die Methode ist radikal — und effektiv.

Was passiert, wenn wir den Begriff der Menge auf den *Prozess* des reinen Zählens anwenden? Wir machen beim Zählen — z.B.

bis 10 — Momentaufnahmen von jeder Zahl und stellen sie der Reihe nach auf wie im ersten Bild.

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5} \quad \boxed{6} \quad \boxed{7} \quad \boxed{8} \quad \boxed{9} \quad \boxed{10}$$

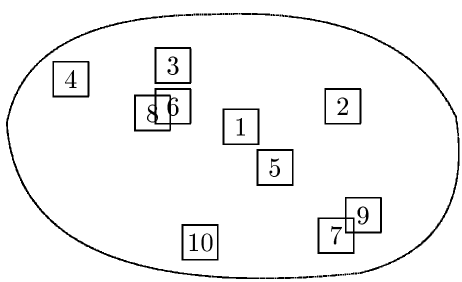
Wir fassen diese Einzelgegenstände im nächsten Bild in einer Menge zusammen:

$$\{\, \boxed{1}\,,\ \boxed{2}\,,\ \boxed{3}\,,\ \boxed{4}\,,\ \boxed{5}\,,\ \boxed{6}\,,\ \boxed{7}\,,\ \boxed{8}\,,\ \boxed{9}\,,\ \boxed{10} \,\}$$

Eine Wirkung ist auf den ersten Blick nicht erkennbar. In einer Menge aber kommt es nicht auf die Reihenfolge an, in der die Elemente gegeben sind. Aus unserer anfänglich geordneten Reihe wird eine ungeordnete Menge, z.B. so:

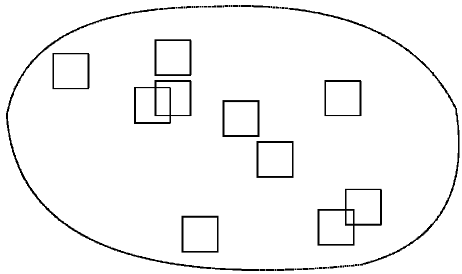
$$\{\, \boxed{4}\,,\ \boxed{7}\,,\ \boxed{3}\,,\ \boxed{1}\,,\ \boxed{8}\,,\ \boxed{9}\,,\ \boxed{2}\,,\ \boxed{10}\,,\ \boxed{5}\,,\ \boxed{6} \,\}$$

In einem Venndiagramm sieht das noch unordentlicher aus:



Übrig bleibt eine Menge zufällig zusammengewürfelter Elemente. Nur ihre Bezeichnungen erinnern noch daran, dass sie aus einem Zählprozess stammen. Und auch diese Erinnerung löschen wir im nächsten Bild.

Vom Zählen und den Zahlen ist nichts mehr zu erkennen. Wir stehen vor einem Scherbenhaufen. Dies ist die Wirkung des Mengenbegriffs und der Zweck seiner Anwendung. Denn wenn wir



versuchen, die Scherben wieder zusammenzusetzen, werden wir einiges über das Zählen erfahren.

Mengenbegriffe sind statisch. Sie entfernen notwendig das wesentliche Charakteristikum des Zählens: Den *Prozess*. Seine Rekonstruktion lässt Strukturen des reinen Zählens und anderer Zählvorgänge sichtbar werden. Solche Rekonstruktionen geschehen implizit in didaktischen Analysen, anschaulich in Pfeil- und Venndiagrammen und explizit in einer mathematischen Darstellung des elementaren Zählens.

Es bestimmt den Stil dieses Buches, nebeneinander Zählvorgänge detailliert umgangssprachlich zu beschreiben, sie zu veranschaulichen und mathematisch nachzuzeichnen. Es entsteht so ein fruchtbarer Austausch zwischen Beobachtungen und Kenntnissen, wie sie in der Mathematikdidaktik und Psychologie vorliegen, und einer Mathematik des elementaren Zählens. Einerseits lenkt die reale, d.h. beobachtete oder dokumentierte Praxis des Zählens und zählenden Rechnens die mathematische Darstellung, andererseits wirkt die mathematische Systematik und Genauigkeit zurück und lässt Details und Zusammenhänge klar und geordnet erkennen. Für eine Übersicht über die Bereiche und Einzelheiten, die hier behandelt werden, blättere man im umfangreichen Inhaltsverzeichnis nach.

Unser Ziel ist, ein Fachwerk erkennbar zu machen, das die elementare Arithmetik stützt. Das Fundament bildet das Zählen.

Wir betonen, dass wir kein treues Abbild der realen, differenzierten Zählprozesse und der individuellen, vielschichtigen Entwicklung des Rechnens liefern wollen und können.

Für unseren Ansatz haben wir einen berühmten historischen Zeugen: Vor gut 100 Jahren — im Jahre 1888 — hat Richard Dedekind (1831–1916) seine berühmte Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* veröffentlicht, die eine mathematische Theorie des unendlichen Zählens enthält. Im Vorwort hat Dedekind ausführlich und ausdrücklich die Beziehung seiner Arbeit zur psychologischen Entwicklung des Zahlbegriffs und des Rechnens hergestellt. In der Schrift selbst ist diese Beziehung nicht ausgeführt. Wir versuchen in unserem Text, die Beziehung zwischen mathematischer Darstellung und der Entwicklung des Rechnens sichtbar zu machen. Dies benötigt eine etwas andere Mathematik, die dem Zählen und Rechnen in endlichen Zahlenräumen nachgebildet ist: Einen endlichen Ansatz für den Begriff des Zählens und einen direkten und nicht nur rekursiven Zugang zur Entwicklung des Rechnens aus dem Zählen.

In seiner Schrift entwirft Dedekind als Grundlage seiner berühmten Kettentheorie und Theorie des Zählens eine frühe Mengenlehre — die es bis dahin nicht gab. Seit Dedekinds Schrift — und nicht zuletzt durch sie — haben die *Mathematischen Grundlagen* eine bedeutende Entwicklung genommen und u.a. viele Mengenlehren produziert und untersucht. Für den mathematischen Teil unserer Darstellungen haben wir als Grundlage eine Mengenlehre ausgewählt, die für unsere endlichen Zwecke besonders geeignet erscheint: Eine finite Mengenlehre — ohne Unendlichkeitsaxiom, in der die *Mengen* den Bereich des Endlichen vertreten und die uns erlaubt, von unendlichen Gesamtheiten als *Klassen* zu sprechen. In Kapitel 2 geben wir eine kurze und einfache Einführung in ihre Grundsätze. Von unendlichen Zählreihen ist im letzten Kapitel die Rede.

Für den Umgang mit dem folgenden Text verweisen wir auf die Gebrauchsanweisung im Vorwort.

Kapitel 1

Zählen und Zahlen

1.1 Zählprozess und Zählzahlen

Wenn wir zählen, so reihen wir die Zahlworte

Eins, Zwei, Drei, ...

aneinander. Oder wir tun dasselbe mit Zahlzeichen wie

1, 2, 3, ...

oder mit Bildern, im einfachsten Fall mit Strichlisten wie

|, ||, |||, ...

In anderen Sprachen und Kulturen sieht das etwas anders aus. Immer aber sind es fest gewählte und vereinbarte Zeichen – sprachlicher, schriftlicher oder bildlicher Art – in einer festen zeitlichen oder räumlichen Reihenfolge. Im einfachsten Fall geht es allein um die Worte, Zeichen oder Bilder: Zahlworte werden aufgesagt – wie in einem Vers – oder Zeichen oder Bilder hintereinander gesetzt. Wir sprechen in diesem Fall von *Zählprozessen*, vom *reinen Zählen* oder einfach von *Zählen* und unterscheiden dies vom *angewandten Zählen*, wie es beim Abzählen von Gegenständen, beim Aufzählen, Ordnen oder Messen geschieht. Wir werden zuerst das reine Zählen untersuchen und beschreiben. Zahlen sind in diesem

Zusammenhang die Zahlworte, Zeichen, Bilder oder andere Dinge in einer festen Reihenfolge.

Zählen ist im Prinzip unendlich, in der Praxis aber, speziell in der Praxis kleinerer Kinder endlich. Im Unterricht der Grundschule werden Grenzen durch „Zahlenräume“ gesetzt, auf die sich das Zählen und Rechnen je nach Schuljahr beschränkt. In der Entwicklung ist das Zählen zuerst deutlich, später unscharf begrenzt durch die zur Verfügung stehenden Zahlworte, Zahlzeichen und Zahlvorstellungen. Die Grenze ist zumeist unbestimmt. Wir werden Zählprozesse beschreiben, die in diesem Sinne begrenzt und endlich sind. Wir können uns die Grenze nach Bedarf beliebig groß – oder klein – denken. Das Problem der sukzessiven Erweiterung der Zahlenräume streifen wir in 4.1. Dem Übergang vom endlichen zum unendlichen Zählen widmen wir das restliche Kapitel 4.

Wir werden im Folgenden *nicht jede Erscheinungsform* des reinen Zählens gesondert betrachten können. Wir wählen daher einen *Stellvertreter*, der für unsere schriftliche Darstellung besonders geeignet und darüber hinaus universell verbreitet ist, nämlich die Reihe der Zahlzeichen

$$1, 2, 3, \ldots .$$

Als Grenze wählen wir, wenn wir Beispiele behandeln, oft die 20 oder aus Gründen der Ökonomie der Darstellung Zahlen wie 10 oder 6. Oft lassen wir die Grenze einfach unbestimmt und bezeichnen sie dann, wenn wir sie bezeichnen müssen, mit z.

Wir wollen jetzt den Zählprozess analysieren. Dazu verdeutlichen wir uns den Prozess des Zählens anschaulich in Diagrammen und suchen nach Worten und Begriffen, um angemessen über diesen so elementaren und selbstverständlichen Prozess sprechen zu können. Soll man erklären, wie Zählen funktioniert, so fällt einem zunächst nicht viel mehr ein, als es vorzumachen. Aufgeschrieben sieht das aus wie oben angegeben. Ein wenig deutlicher wird es – z.B. für das Zählen bis Zehn, wenn man Pfeile zeichnet: