

Peter Borneleit
Peter Kirsche
Reinhard Strehl
(Hrsg.)

Studium und Lehre
Mathematik

Hans-Dieter Gerster

Aussagenlogik Mengen Relationen

Hans-Dieter Gerster

Aussagenlogik

Mengen

Relationen

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Gerster, Hans-Dieter:
Aussagenlogik, Mengen, Relationen /
Hans-Dieter Gerster. -
Hildesheim : Franzbecker, 1998
(Studium und Lehre ; Mathematik)
ISBN 3-88120-287-0

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren als auch für die Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien.

Inhalt

<i>Vorwort</i>	10
<i>I Zur Einführung</i>	11
1 <i>Aussagen</i>	11
2 <i>Prädikative Aussageformen</i>	13
2.1 <i>Subjekte und Prädikate</i>	13
2.2 <i>Prädikative Aussageformen und Quantoren</i>	14
2.3 <i>Einstellige Prädikate und Mengen</i>	15
2.4 <i>Zweistellige Prädikate und Relationen</i>	15
2.5 <i>Dreistellige Prädikate und zweistellige Verknüpfungen</i>	16
<i>II Aussagenlogik</i>	17
1 <i>Zur Aussagenlogik führende Abstraktionen</i>	17
2 <i>Aussagenlogische Verknüpfungen</i>	20
2.1 <i>Die Negation</i>	20
2.2 <i>Die Konjunktion (Und-Verknüpfung)</i>	21
2.3 <i>Die Disjunktion (Oder-Verknüpfung)</i>	23
2.4 <i>Die Alternative (Entweder — oder-Verknüpfung)</i>	24
2.5 <i>Die Subjunktion (Wenn — dann-Verknüpfung)</i>	25
2.6 <i>Die Bijunktion</i>	29
2.7 <i>Überblick über die Wahrheitswertfunktionen mit zwei Variablen</i>	30
2.8 <i>Aussagenlogische Verknüpfungen mit mehr als zwei Variablen</i>	31
2.8.1 <i>Anzahl der möglichen Belegungen</i>	31
2.8.2 <i>Anzahl der Wahrheitswertfunktionen von n Variablen</i>	33

3	<i>Gesetze der Aussagenlogik</i>	35
3.1	Aussagenlogische Aussageformen mit mehreren Junktoren	35
3.1.1	Bildung von aussagenlogischen Aussageformen. Verwendung von Klammern	35
3.1.2	Aufstellung von Wahrheitswertetafeln	36
3.2	Tautologien, Kontradiktionen und teilgültige Aussageformen	37
3.3	Logisch wahre und faktisch wahre Aussagen	39
3.4	Logische Implikation und logische Äquivalenz	41
3.5	Zusammenfassung aussagenlogischer Gesetze	44
3.5.1	Gesetze, in welchen nur die Junktoren \wedge , \vee , \neg auftreten	45
3.5.2	Gesetze, welche die Junktoren \succ , \rightarrow , \leftrightarrow auf die Junktoren \wedge , \vee , \neg zurückführen	48
3.5.3	Aussagenlogische Gesetze über die Subjunktion	50
3.5.4	Aussagenlogische Gesetze über die Bijunktion	52
3.6	Hinweise zum axiomatischen Aufbau der Aussagenlogik	53
3.7	Schlußregeln der Aussagenlogik	54
3.7.1	Zum Begriff der logischen Folgerung	54
3.7.2	Der Begriff der gültigen Schlußregel	56
3.7.3	Häufig verwendete Schlußregeln	57
3.7.4	Überprüfung von Schlußregeln auf ihre Gültigkeit	58
3.7.5	Schlußregeln bei direkten und indirekten Beweisverfahren	60
	<i>III Quantoren</i>	64
1	<i>Bildung von Aussagen mit Hilfe von Quantoren</i>	64
2	<i>Freie und gebundene Variablen</i>	65
3	<i>Negation von All- und Existenzaussagen</i>	67
4	<i>Hinweis auf die Quantorenlogik</i>	70
	<i>IV Mengen</i>	72
1	<i>Der Begriff der Menge</i>	72
1.1	Einführende Beispiele	72
1.2	Die Elementbeziehung	73
1.3	Der Mengenbildungsoperator	73

1.4	Zur Problematik des Mengenbegriffs	74
1.5	Prädikative Aussageformen und Grundmengen	77
1.6	Darstellungen von Mengen, Gleichheitszeichen bei Zeichen für Mengen	78
2	<i>Beziehungen zwischen Mengen</i>	82
2.1	Die Teilmengenbeziehung	82
2.1.1	Definition der Teilmengenbeziehung	82
2.1.2	Inhaltliche Implikation zwischen prädikativen Aussageformen	83
2.1.3	Bemerkungen zum Begriff der inhaltlichen Implikation	86
2.2	Die Gleichheitsbeziehung zwischen Mengen	87
2.2.1	Definition der Gleichheitsbeziehung	87
2.2.2	Die inhaltliche Äquivalenz zwischen prädikativen Aussageformen	88
2.3	Die Potenzmenge	89
3	<i>Verknüpfungen von Mengen</i>	90
4	<i>Gesetze der Mengenalgebra</i>	99
4.1	Gesetze, in denen \cap , \cup und $\bar{}$ auftreten	99
4.1.1	Zusammenstellung dieser Gesetze	99
4.1.2	Veranschaulichung einiger Gesetze durch Venndiagramme oder Karnaughdiagramme	100
4.1.3	Erläuterungen zu diesen Gesetzen der Mengenalgebra	101
4.2	Gesetze, welche die Operationen Δ und \setminus und die Teilmengenbeziehung \subseteq auf die Operationen \cup , \cap , $\bar{}$ zurückführen.	102
4.3	Eigenschaften der Teilmengenbeziehung	103
4.4	Beweise für die Gesetze der Mengenalgebra	103
4.4.1	Beweis der Gesetze der Mengenalgebra mit Hilfe der Gesetze der Aussagenlogik	104
4.4.2	Beweis der Gesetze der Mengenalgebra mit Zugehörigkeitstafeln	105
4.4.3	Ableitung von Gesetzen der Mengenalgebra	108
V	<i>Zweistellige Relationen</i>	114
1	<i>Geordnete Paare, Cartesisches Produkt von Mengen</i>	114

2	<i>Grundlegende Definitionen</i>	120
3	<i>Darstellungen von Relationen</i>	124
4	<i>Operationen mit Relationen</i>	127
4.1	Das Komplement einer Relation	128
4.2	Die Umkehrrelation einer Relation	130
4.3	Verkettung von Relationen	132
5	<i>Eigenschaften von Relationen zwischen Mengen</i>	135
5.1	Sonderfälle hinsichtlich des Vor- und Nachbereiches	135
5.2	Sonderfälle hinsichtlich der Eindeutigkeit	136
5.3	Abbildungen (Funktionen, Operatoren)	138
5.4	Eigenschaften von Abbildungen (Funktionen)	141
6	<i>Eigenschaften von Relationen in einer Menge</i>	145
6.1	Eigenschaften hinsichtlich der Reflexivität	146
6.2	Eigenschaften hinsichtlich der Symmetrie	147
6.3	Transitivität einer Relation	150
6.4	Konnexität einer Relation	150
7	<i>Äquivalenzrelationen</i>	152
7.1	Hinführende Beispiele	152
7.2	Äquivalenzrelationen	152
7.3	Äquivalenzklassen	155
8	<i>Ordnungsrelationen</i>	157
8.1	Hassediagramme	158
8.2	Nicht strenge Ordnungsrelationen	160
8.3	Strenge Ordnungsrelationen	161
<i>VI Zweistellige Verknüpfungen als dreistellige Relationen</i>		164
1	<i>Cartesische Produkte und n-stellige Relationen</i>	164
2	<i>Zweistellige Verknüpfungen</i>	168
3	<i>Verknüpfungsgebilde</i>	170
8		

3.1	Halbgruppe, Gruppe	170
3.2	Boolesche Algebra	172
	Lösungen der Übungsaufgaben	175
	Literaturhinweise	186
	Sachverzeichnis	188

Vorwort zur 1. Auflage

Die in diesem Band behandelten Gebiete Aussagenlogik, Quantoren, Mengen, zweistellige Relationen und zweistellige Verknüpfungen kann man auf sehr verschiedenen Abstraktionsstufen und in verschieden starker Formalisierung behandeln. Man kann sie behandeln auf einem Niveau, das den Schülern der Sekundarstufe I angemessen ist. Man kann sie aber auch auf dem Niveau abhandeln, das durch das Stichwort Formale Logik gekennzeichnet ist.

Die vorliegende Darstellung wendet sich in erster Linie an Studierende des Lehramts für die Primarstufe und die Sekundarstufe I. Sie will eine Brücke schlagen zwischen der Mathematik, die diese Studierenden als Schüler kennenlernten, und der Mathematik, die sie während ihres Studiums kennenlernen sollen. Dieser Band wendet sich also an die Studierenden der ersten Semester und soll mit dem Stoff vertraut machen, der bei weiterführenden mathematischen Vorlesungen und Übungen wie Zahlentheorie, Zahlbereichserweiterungen, Gruppentheorie usw., sowie bei didaktischen Veranstaltungen vorausgesetzt wird.

Die Darstellung ist so gewählt, daß meist von Beispielen ausgegangen wird, welche als Motivation von Definitionen dienen und Zusammenhänge vermuten lassen. Ansätze zur Formalisierung und deren Vorteile werden aufgezeigt. Bei der Behandlung der mathematischen Themen wird immer darauf geachtet, daß deren Relevanz für den Mathematikunterricht durchscheint.

Das Kapitel I gibt einen knappen Überblick über die in diesem Band behandelten Themen und deren Zusammenhang. Die hier nur angedeuteten Begriffe und Zusammenhänge werden in den folgenden Kapiteln ausführlich behandelt.

Den meisten Abschnitten sind Übungsaufgaben beigelegt, anhand welcher der Leser seine Kenntnisse überprüfen und die neuen Begriffe einüben kann. Die Lösungen der Aufgaben sind am Ende des Bandes angegeben.

Vorwort zu diesem Nachdruck

Vorliegender Band ist ein unveränderter Nachdruck der 5. Auflage (1981) der erstmals 1972 in der Reihe Studienbücher Mathematik bei Herder erschienenen Bandes mit gleichem Titel. Nach Einstellung dieser Reihe war der Band viele Jahre vergriffen. Da ich seither immer wieder von Kollegen hörte, dass sie das Buch gerne in ihren einführenden Lehrveranstaltungen verwenden und es begrüßen würden, wenn es den Studierenden wieder zur Verfügung stünde, habe ich dem Nachdruck zugestimmt.

Freiburg, im Juli 1997

I Zur Einführung

1 AUSSAGEN

Sowohl in der Umgangssprache als auch in der mathematischen Fachsprache werden häufig Formulierungen verwendet, die, nach ihrem Inhalt beurteilt, entweder wahr (*w*) oder falsch (*f*) sind.

Beispiele:

1. München ist eine Großstadt.
2. Der Mars ist ein Fixstern.
3. 7 ist eine Primzahl.
4. $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.
5. 2 ist Teiler von 7.
6. Stuttgart ist größer als München.
7. 5 ist kleiner als 15.
8. 5 liegt zwischen 1 und 10.
9. $2 + 5 = 8$.

Wir erklären:

- Ein sprachliches Gebilde, das seinem Inhalt nach entweder wahr oder falsch ist, nennen wir eine **Aussage**.

Die Beispiele 1, 3, 7 und 8 sind Aussagen mit dem *Wahrheitswert* *w*, die Beispiele 2, 4, 5, 6 und 9 Aussagen mit dem *Wahrheitswert* *f*.

Die obige Erklärung ist keine Definition des Begriffs Aussage, da sie Begriffe enthält, die ihrerseits wieder definiert werden müßten, z. B. „sprachliches Gebilde“, „Inhalt“, „wahr“, „falsch“. Eine Definition des Begriffs Aussage ist erst im Rahmen einer formalisierten Theorie möglich. Wir verwenden den Begriff Aussage als einen nicht definierten *Grundbegriff* und stellen uns für eine erste Einführung auf den Standpunkt, daß durch

I Zur Einführung

obige Erklärung in etwa umschrieben ist, was eine Aussage ist. Wesentlich ist, daß die Zuordnung eines der beiden Wahrheitswerte prinzipiell eindeutig ist. Dies ist bei den meisten umgangssprachlichen Formulierungen nicht der Fall. Beispielsweise kann man sich streiten, ob „heute hat es geregnet“ eine Aussage ist. Wann soll man dieser Formulierung den Wert w zuordnen? Wenn es einmal kurz geregnet hat? Nur wenn es in einem genügend großen Gebiet den ganzen Tag (vielleicht auch noch die ganze Nacht) ununterbrochen geregnet hat? Was heißt „es regnet“? Ist ein leichtes Nieseln bereits regnen? Ähnlich wie bei dieser Formulierung ist es bei den meisten umgangssprachlichen Formulierungen schwierig, in strengem Sinn von Aussagen zu sprechen. Man kann jedoch genügend viele Beispiele finden, denen man eindeutig den Wert w oder f zuordnen kann. Vor allem aber bei Formulierungen der mathematischen Fachsprache ist die Entscheidung über den Wahrheitswert im allgemeinen eindeutig zu fällen.

Es gibt sprachliche Gebilde, denen man nicht in sinnvoller Weise genau einen der beiden Wahrheitswerte zuordnen kann.

Beispiele:

1. Wieviel Uhr ist es?
2. Herzlichen Glückwunsch!
3. Petra ist klug.
4. 13 ist eine Glückszahl.
5. Hamburg ist eine schöne Stadt.

Man sieht unmittelbar, daß Fragen, Ausrufe und Befehle keine Aussagen sind. Bei den Beispielen 3, 4 und 5 hängt die Zuordnung eines Wahrheitswertes von der subjektiven Einstellung von Personen ab. Auch hier sprechen wir nicht von Aussagen.

Viele Aussagen sind mit Hilfe von Bindewörtern wie z. B. „und“, „oder“, „wenn . . . , dann . . .“ aus einfacheren Aussagen zusammengesetzt.

Beispiele:

1. 6 ist durch 2 teilbar oder durch 3 teilbar.
2. Wenn 3 kleiner ist als 5, dann ist $\frac{1}{3}$ größer als $\frac{1}{5}$.
3. 6 ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 4.

Die Aussage 1 ist aus den beiden Aussagen „6 ist durch 2 teilbar“ und „6 ist durch 3 teilbar“ zusammengesetzt, die Aussage 2 aus den beiden Aussagen „3 ist kleiner als 5“ und „ $\frac{1}{3}$ ist größer als $\frac{1}{5}$ “. Wir erklären:

2. Prädikative Aussageformen

- Eine Aussage heißt *nichtelementar*, wenn sie aus zwei oder mehreren Teilaussagen zusammengesetzt ist oder durch (evtl. mehrfache) Negation einer elementaren Aussage entsteht.

2 PRÄDIKATIVE AUSSAGEFORMEN

2.1 Subjekte und Prädikate

Wir geben noch einige Beispiele von elementaren Aussagen.

Beispiele:

1. Der Mars ist ein Planet.
2. 2 ist eine Primzahl.
3. 5 ist ein Teiler von 7.
4. 7 ist kleiner als 15.
5. $\sqrt{2}$ liegt zwischen 1 und 2.
6. Die Summe von 3 und 5 ist 9.

Betrachten wir diese elementaren Aussagen hinsichtlich ihres *inneren* Aufbaus, so stellen wir fest, daß sie aus Namen für Einzeldinge (Objekte, Individuen) und aus Prädikaten zusammengesetzt sind. Namen für Einzeldinge (Objekte) nennen wir *Subjekte*. Satzteile, denen ein oder mehrere Subjekte zugefügt werden müssen, damit eine Aussage entsteht, nennen wir *Prädikate*¹. Als Subjekte treten in obigen Beispielen u. a. auf: „Der Mars“, „2“, „5“, „ $\sqrt{2}$ “, als Prädikate „... ist ein Planet“, „... ist eine Primzahl“, „... ist Teiler von ...“ usw.

Muß man zu einem Prädikat *ein* Subjekt hinzufügen, damit eine Aussage entsteht, so heißt das Prädikat *einstellig*. Also sind „... ist ein Planet“ und „... ist eine Primzahl“ *einstellige Prädikate*. Ganz entsprechend heißen „... ist Teiler von ...“ oder „... ist kleiner als ...“ *zweistellige Prädikate*. „... liegt zwischen ... und ...“ bzw. „die Summe von ... und ... ist ...“ sind *dreistellige Prädikate*.

¹ Die Begriffe „Subjekt“ und „Prädikat“ werden in der mathematischen Logik in einem anderen Sinn verwendet als in der Grammatik.