Peter Borneleit
Peter Kirsche
Reinhard Strehl
(Hrsg.)

Studium und Lehre Mathematik

Hans-Dieter Gerster

Aussagenlogik Mengen Relationen

Hans-Dieter Gerster

Aussagenlogik
Mengen
Relationen

div verlag
franzbecker

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Gerster, Hans-Dieter:
Aussagenlogik, Mengen, Relationen /
Hans-Dieter Gerster. -
Hildesheim : Franzbecker, 1998
(Studium und Lehre ; Mathematik)
ISBN 3-88120-287-0

Inhalt

Vorwort zur 1. Auflage

Die in diesem Band behandelten Gebiete Aussagenlogik, Quantoren, Mengen, zweistellige Relationen und zweistellige Verknüpfungen kann man auf sehr verschiedenen Abstraktionsstufen und in verschieden starker Formalisierung behandeln. Man kann sie behandeln auf einem Niveau, das den Schülern der Sekundarstufe I angemessen ist. Man kann sie aber auch auf dem Niveau abhandeln, das durch das Stichwort Formale Logik gekennzeichnet ist.
Die vorliegende Darstellung wendet sich in erster Linie an Studierende des Lehramts für die Primarstufe und die Sekundarstufe I. Sie will eine Brücke schlagen zwischen der Mathematik, die diese Studierenden als Schüler kennenlernten, und der Mathematik, die sie während ihres Studiums kennenlernen sollen. Dieser Band wendet sich also an die Studierenden der ersten Semester und soll mit dem Stoff vertraut machen, der bei weiterführenden mathematischen Vorlesungen und Übungen wie Zahlentheorie, Zahlbereichserweiterungen, Gruppentheorie usw., sowie bei didaktischen Veranstaltungen vorausgesetzt wird.
Die Darstellung ist so gewählt, daß meist von Beispielen ausgegangen wird, welche als Motivation von Definitionen dienen und Zusammen-hänge vermuten lassen. Ansätze zur Formalisierung und deren Vorteile werden aufgezeigt. Bei der Behandlung der mathematischen Themen wird immer darauf geachtet, daß deren Relevanz für den Mathematikunterricht durchscheint.
Das Kapitel 1 gibt einen knappen Überblick über die in diesem Band behandelten Themen und deren Zusammenhang. Die hier nur angedeuteten Begriffe und Zusammenhänge werden in den folgenden Kapiteln ausführlich behandelt.
Den meisten Abschnitten sind Übungsaufgaben beigefügt, anhand welcher der Leser seine Kenntnisse überprüfen und die neuen Begriffe einüben kann. Die Lösungen der Aufgaben sind am Ende des Bandes angegeben.

Vorwort zu diesem Nachdruck

Vorliegender Band ist ein unveränderter Nachdruck der 5. Auflage (1981) der erstmals 1972 in der Reihe Studienbücher Mathematik bei Herder erschienenen Bandes mit gleichem Titel. Nach Einstellung dieser Reihe war der Band viele Jahre vergriffen. Da ich seither immer wieder von Kollegen hörte, dass sie das Buch gerne in ihren einführenden Lehrveranstaltungen verwenden und es begrüßen würden, wenn es den Studierenden wieder zur Verfügung stünde, habe ich dem Nachdruck zugestimmt.

Freiburg, im Juli 1997

I Zur Einführung

1 AUSSAGEN

Sowohl in der Umgangssprache als auch in der mathematischen Fachsprache werden häufig Formulierungen verwendet, die, nach ihrem Inhalt beurteilt, entweder wahr (w) oder falsch (f) sind.

Beispiele:
1. München ist eine Großstadt.
2. Der Mars ist ein Fixstern.
3. 7 ist eine Primzahl.
4. $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.
5. 2 ist Teiler von 7.
6. Stuttgart ist größer als München.
7. 5 ist kleiner als 15.
8. 5 liegt zwischen 1 und 10.
9. $2 + 5 = 8$.

Wir erklären:

■ Ein sprachliches Gebilde, das seinem Inhalt nach entweder wahr oder falsch ist, nennen wir eine **Aussage.**

Die Beispiele 1, 3, 7 und 8 sind Aussagen mit dem *Wahrheitswert w*, die Beispiele 2, 4, 5, 6 und 9 Aussagen mit dem *Wahrheitswert f.*

Die obige Erklärung ist keine Definition des Begriffs Aussage, da sie Begriffe enthält, die ihrerseits wieder definiert werden müßten, z. B. „sprachliches Gebilde“, „Inhalt“, „wahr“, „falsch“. Eine Definition des Begriffs Aussage ist erst im Rahmen einer formalisierten Theorie möglich. Wir verwenden den Begriff Aussage als einen nicht definierten *Grundbegriff* und stellen uns für eine erste Einführung auf den Standpunkt, daß durch obige Erklärung in etwa umschrieben ist, was eine Aussage ist. Wesentlich ist, daß die Zuordnung eines der beiden Wahrheitswerte prinzipiell eindeutig ist. Dies ist bei den meisten umgangssprachlichen Formulierungen nicht der Fall. Beispielsweise kann man sich streiten, ob „heute hat es geregnet" eine Aussage ist. Wann soll man dieser Formulierung den Wert w zuordnen? Wenn es einmal kurz geregnet hat? Nur wenn es in einem genügend großen Gebiet den ganzen Tag (vielleicht auch noch die ganze Nacht) ununterbrochen geregnet hat? Was heißt „es regnet"? Ist ein leichtes Nieseln bereits regnen? Ähnlich wie bei dieser Formulierung ist es bei den meisten umgangssprachlichen Formulierungen schwierig, in strengem Sinn von Aussagen zu sprechen. Man kann jedoch genügend viele Beispiele finden, denen man eindeutig den Wert w oder f zuordnen kann. Vor allem aber bei Formulierungen der mathematischen Fachsprache ist die Entscheidung über den Wahrheitswert im allgemeinen eindeutig zu fällen.

Es gibt sprachliche Gebilde, denen man nicht in sinnvoller Weise genau einen der beiden Wahrheitswerte zuordnen kann.

Beispiele:
1. Wieviel Uhr ist es?
2. Herzlichen Glückwunsch!
3. Petra ist klug.
4. 13 ist eine Glückszahl.
5. Hamburg ist eine schöne Stadt.

Man sieht unmittelbar, daß Fragen, Ausrufe und Befehle keine Aussagen sind. Bei den Beispielen 3, 4 und 5 hängt die Zuordnung eines Wahrheitswertes von der subjektiven Einstellung von Personen ab. Auch hier sprechen wir nicht von Aussagen.
Viele Aussagen sind mit Hilfe von Bindewörtern wie z. B. „und", „oder", „wenn . . . , dann . . ." aus einfacheren Aussagen zusammengesetzt.

Beispiele:
1. 6 ist durch 2 teilbar oder durch 3 teilbar.
2. Wenn 3 kleiner ist als 5, dann ist $\frac{1}{3}$ größer als $\frac{1}{5}$.
3. 6 ist durch 3 teilbar, aber nicht durch 4.

Die Aussage 1 ist aus den beiden Aussagen „6 ist durch 2 teilbar" und „6 ist durch 3 teilbar" zusammengesetzt, die Aussage 2 aus den beiden Aussagen „3 ist kleiner als 5" und „$\frac{1}{3}$ ist größer als $\frac{1}{5}$". Wir erklären:

■ Eine Aussage heißt *nichtelementar*, wenn sie aus zwei oder mehreren Teilaussagen zusammengesetzt ist oder durch (evtl. mehrfache) Negation einer elementaren Aussage entsteht.

2 PRÄDIKATIVE AUSSAGEFORMEN

2.1 Subjekte und Prädikate

Wir geben noch einige Beispiele von elementaren Aussagen.

Beispiele:
1. Der Mars ist ein Planet.
2. 2 ist eine Primzahl.
3. 5 ist ein Teiler von 7.
4. 7 ist kleiner als 15.
5. $\sqrt{2}$ liegt zwischen 1 und 2.
6. Die Summe von 3 und 5 ist 9.

Betrachten wir diese elementaren Aussagen hinsichtlich ihres *inneren* Aufbaus, so stellen wir fest, daß sie aus Namen für Einzeldinge (Objekte, Individuen) und aus Prädikaten zusammengesetzt sind. Namen für Einzeldinge (Objekte) nennen wir *Subjekte*. Satzteile, denen ein oder mehrere Subjekte zugefügt werden müssen, damit eine Aussage entsteht, nennen wir *Prädikate*[1]. Als Subjekte treten in obigen Beispielen u. a. auf: „Der Mars", „2", „5", „$\sqrt{2}$", als Prädikate „. . . ist ein Planet", „. . . ist eine Primzahl", „. . . ist Teiler von . . ." usw.

Muß man zu einem Prädikat *ein* Subjekt hinzufügen, damit eine Aussage entsteht, so heißt das Prädikat einstellig. Also sind „. . . ist ein Planet" und „. . . ist eine Primzahl" *einstellige Prädikate*. Ganz entsprechend heißen „. . . ist Teiler von . . ." oder „. . . ist kleiner als . . ." *zweistellige Prädikate*. „. . . liegt zwischen . . . und . . ." bzw. „die Summe von . . . und . . . ist . . ." sind *dreistellige Prädikate*.

[1] Die Begriffe „Subjekt" und „Prädikat" werden in der mathematischen Logik in einem anderen Sinn verwendet als in der Grammatik.