Peter Borneleit
Peter Kirsche
Reinhard Strehl
(Hrsg.)

Studium und Lehre Mathematik

A. Mitschka / R. Strehl / E. Hollmann

Einführung in die Geometrie

Grundlagen, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen

diVerlag
franzbecker

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Mitschka, Arno:
Einführung in die Geometrie : Grundlagen, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen / Arno Mitschka/ R. Strehl/E. Hollmann. -
Hildesheim : Franzbecker, 1998
(Studium und Lehre : Mathematik)
ISBN 3-88120-286-2

ISBN 3-88120-286-2

Vorwort

Die Euklidische Geometrie ist die Geometrie des Anschauungsraumes, und dies ist nicht nur die Geometrie unserer täglichen Erfahrungen, es ist - mit Recht - auch die Geometrie der Schulmathematik. Der vorliegende Band ist im Blick auf den Geometrieunterricht der Schule geschrieben und wendet sich vor allem an Studierende für ein Lehramt im Fach Mathematik. Doch ist das Buch *keine* Didaktik der Geometrie und schon gar nicht ein Leitfaden für den Unterricht. Man könnte den Inhalt als **Hintergrundtheorie** für den Unterricht bezeichnen; denn es geht um folgende Schwerpunkte und Ziele:

- Die Vielfalt der geometrischen Inhalte, die im Mathematikunterricht vorkommen können, sollte sich für den Lehrer in einen geschlossenen Gesamtaufbau einordnen lassen. Dies gilt besonders deshalb, weil die Abfolge, in der die Inhalte aus mancherlei pädagogischen, psychologischen und fachdidaktischen Gründen im Mathematikunterricht auftreten, einen systematischen Aufbau oft kaum erkennen läßt.

- Während das schulische Lernen von Alltagserfahrungen ausgeht, ist die Geometrie als mathematische Theorie von der Erfahrung unabhängig. Die Euklidische Geometrie kann jedoch als abstrakte Beschreibung unserer räumlichen Erfahrungen verstanden werden.

- Das Beweisen geometrischer Sätze tritt im Unterricht, zumindest in den unteren Jahrgangsstufen, ganz oder weitgehend zurück. Für den Lehrer ist es aber unabdingbare Voraussetzung für ein flexibles Umgehen mit geometrischen Inhalten. Es ist schwer, sich dabei einerseits von der Anschauung zu lösen, um sich von ihr nicht zu voreiligen Schlüssen verleiten zu lassen, andererseits aber die anschauliche Bedeutung der abstrakt zu beweisenden Aussagen stets im Auge zu behalten. Die recht ausführliche Darstellung vieler Beweise will dabei Beispiel und Hilfe geben.

Die zugrundegelegten Axiome, die Grundsätze, von denen wir ausgehen, sind sehr einfach und formulieren im wesentlichen nur einfachste

Grunderfahrungen in bezug auf das Zeichnen in der gewöhnlichen Ebene oder das Falten von Papier. Es soll gezeigt werden, wie aus den sehr elementaren, am Anfang stehenden Festlegungen nach rein logischen Prinzipien das große Gebäude der Geometrie als Schöpfung menschlichen Denkens, also nicht als Sammlung von Erfahrungen und Beobachtungen, entsteht. Um dies deutlich zu machen, ist es notwendig, in vielen Fällen auch anschaulich evidente Sachverhalte zu beweisen, bei denen es für Schüler keinerlei Beweisbedürfnis gibt.

Die riesige Fülle elementargeometrischer Inhalte macht es jedoch unmöglich, vollständig zu sein. Manche Beweise mußten dem Leser überlassen oder auf den Übungsteil des Buches verwiesen werden. Die große Fülle der Inhalte ist auch der Grund für eine Beschränkung auf die Geometrie der Ebene. In einer Hintergrundtheorie ist das vertretbar, auch wenn in der Schulmathematik räumliche Probleme aus psychologischen und didaktischen Gründen eine wichtige Rolle spielen sollten.

Der Band greift in der Wahl des Axiomensystems und in manchen Kapiteln auf die 1974 bei Herder erschienene "Einführung in die Geometrie" von A. Mitschka (†) und R. Strehl zurück. Nach mehr als 20 Jahren schien eine neue Darstellung des Stoffes angebracht. Vom gleichen Grundkonzept ausgehend, haben wir versucht,

- die dem Aufbau einer in sich geschlossenen Theorie dienenden Sätze nach Möglichkeit von ihren Anwendungen zu trennen,
- wichtige, für die Schulgeometrie unverzichtbare Anwendungen, die seinerzeit nur angedeutet waren, in kurzen Abschnitten auch auszuführen, sowie
- die Bezeichnungsweisen dem heute Üblichen anzupassen und dabei möglichst nahe bei den im Alltag benutzten Sprech- und Schreibweisen zu bleiben, ohne dadurch die Strenge des gedanklichen Aufbaus zu beeinträchtigen.

In der Zeit nach dem ersten Neudruck des Bandes sind wir auf verschiedene Druckfehler und Irrtümer aufmerksam gemacht worden. Beim Umfang des Stoffes und bei mancherlei satztechnischen Schwierigkeiten, sind wir jedoch kaum sicher, jetzt alles erfaßt zu haben. Deshalb: Für weitere Hinweise auf Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten danken wir allen Lesern im voraus.

Lüneburg, im März 2001

E. Hollmann *R. Strehl*

Inhalt

I. Die Axiome der Elementargeometrie

1. DER AXIOMATISCHE AUFBAU

Begriffe wie Punkt, Gerade, Winkel, Ebene spielen nicht nur in der Mathematik eine Rolle. Es sind ebenso Begriffe der Technik und - bei meist weniger präziser Verwendung - auch Begriffe unserer Umgangssprache, mit denen wir jedoch sehr anschauliche Vorstellungen verbinden. Wenn wir von solchen Begriffen ausgehen und unabhängig von den anschaulichen Vorstellungen nach rein logischen Gesetzmäßigkeiten eine mathematische Theorie, hier die *ebene Geometrie*, aufbauen wollen, so wäre es naheliegend, eine genaue Definition derartiger **Grundbegriffe** an den Anfang zu stellen. Es erscheint paradox, ist aber durchaus charakteristisch für den Aufbau einer mathematischen Theorie, daß wir gerade die einfachsten Begriffe, von denen wir ausgehen, vielfach *nicht definieren* können. Wir können nicht sagen, was ein Punkt *ist*, wir können nur sagen, welche Beziehungen zwischen Punkten und Geraden, zwischen Geraden und Ebenen bestehen und so fort. Wir können also zwar unsere Grundbegriffe nicht definieren, wohl aber können wir Beziehungen zwischen ihnen, sogenannte Grundsätze oder **Axiome**, formulieren, aus denen wir dann eine Theorie aufbauen.

Obwohl wir in der Wahl der Grundsätze prinzipiell frei sind, ist eine mathematische Theorie jedoch nicht nur gedankliche Spielerei. Sie dient vielfach zugleich der Beschreibung von Vorgängen und Sachverhalten der uns umgebenden Natur. So ist etwa die Differentialrechnung - unter anderem - ein Instrument zur Beschreibung von physikalischen Vorgängen und die Geometrie ein Instrument zur Erfassung räumlicher Beziehungen in der wahrnehmbaren Umwelt. Gerade damit wird aber deutlich, daß es sich bei den Axiomen in der Tat um *Festsetzungen* handelt; denn es hat sich gezeigt, daß die dem Leser von der Schule her bekannte sogenannte *Euklidische Geometrie* dieser Aufgabe zwar "im Kleinen" gut gerecht wird, daß aber "im Großen", in den

Dimensionen des Weltraums, ganz andere Grundsätze und, darauf aufbauend, eine ganz andere geometrische Theorie weit besser geeignet sind. Eine mathematische Theorie ist also meist nur einem Teilbereich oder auch nur einem Teilaspekt der Wirklichkeit so angepaßt, daß sie dessen Gesetzmäßigkeiten zu beherrschen gestattet. Schon *Euklid* hat vor mehr als 2000 Jahren den Charakter von Axiomen der Geometrie als Festsetzung - er nannte sie "Postulate" - im wesentlichen erkannt. Zur streng mathematischen Methode wurde das axiomatische Vorgehen jedoch erst im 19. und 20. Jahrhundert.

Der Willkür bei der Wahl der Axiome sind nicht nur vom Zweck der Theorie her, sondern auch unter logischen und mathematischen Gesichtspunkten gewisse Grenzen gesetzt:

Die Axiome **müssen** logisch **widerspruchsfrei** sein. Diese Forderung ergibt sich aus der Sache selbst. Eine auf widersprüchlichen Grundannahmen aufbauende Theorie wäre von vornherein gegenstandslos, da man aus falschen Prämissen nach den Gesetzen der Logik ganz beliebige Folgerungen ableiten kann.

Die Axiome **sollen** voneinander **unabhängig** sein. Das bedeutet: Kein Axiom sollte aus den übrigen beweisbar sein, sonst könnte es unter den festzusetzenden Grundannahmen ja entfallen. Dies ist vor allem eine Frage der beweistechnischen Ökonomie. Schon für einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit eines Systems ist es zweckmäßig, von möglichst einfachen und von möglichst wenigen Axiomen auszugehen. Umgekehrt stellt sich aber mitunter auch die Frage, ob ein Satz, ein vermuteter Sachverhalt, mit den bis dahin gegebenen Voraussetzungen überhaupt beweisbar ist oder ob er unabhängig ist und somit den Charakter eines neu hinzukommenden Axioms hat. In der Geschichte der Mathematik gibt es ein bedeutsames Beispiel für ein solches Problem: Von der Zeit des Euklid an bis in das 19. Jahrhundert hinein wurde immer wieder versucht, das sogenannte *Parallelenpostulat* zu beweisen, ehe schließlich den Mathematikern *Bolyai* und *Lobatschewski* der Nachweis gelang, daß es sich dabei um ein unabhängiges Axiom handelt.

Neben den genannten Gesichtspunkten gibt es in bezug auf die Formulierung eines Axiomensystems noch eine Reihe von theoretischen Fragen, die wir hier nur in großen Zügen ansprechen können. Nicht zuletzt haben für die vorliegende Einführung in die Geometrie jedoch auch didaktische Gesichtspunkte die Wahl des Axiomensystems mitbestimmt:

> Wir werden von solchen Axiomen ausgehen, die - obwohl sie für uns Festsetzungen sind - für das Kind als unmittelbar evidente