

Peter Borneleit
Peter Kirsche
Reinhard Strehl
(Hrsg.)

slm
studium und lehre
mathematik

Reinhard Strehl

Zahlbereiche

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche
Nationalbibliografie; detailed bibliographic data is available in the
Internet at <<http://dnb.ddb.de>>.

ISBN 3-88120-285-4

Reinhard Strehl Zahlbereiche

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der
Vervielfältigung und Übertragung auch einzelner Textabschnitte, Bilder oder Zeichnungen
vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Zustimmung des Verlages in
irgendeiner Form reproduziert werden (Ausnahmen gem. 53, 54 URG). Das gilt sowohl
für die Vervielfältigung durch Fotokopie oder irgendein anderes Verfahren als auch für die
Übertragung auf Filme, Bänder, Platten, Transparente, Disketten und andere Medien.

© 2003 by Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin

Vorwort

Der vorliegende Band ist eine Neufassung der bereits 1972 unter dem Titel "Zahlbereiche" erschienenen Schrift. Wie seinerzeit geht es um die Bereitstellung einer **mathematischen Hintergrundtheorie für Zahlbegriff, Aufbau der Rechenoperationen und Zahlbereichserweiterungen im Mathematikunterricht**. Der Aufbau der mathematischen Theorie von den natürlichen zu den reellen und in einem kurzen Ausblick zu den komplexen Zahlen wurde im wesentlichen beibehalten. Im Vergleich zur früheren Fassung sind aber vor allem die didaktischen Anmerkungen zu den einzelnen Zahlbereichen und Zahlbereichserweiterungen aktualisiert und neu gefaßt. Hinzugefügt wurde im Kapitel über die natürlichen Zahlen ein selbständiger Abschnitt über Zahlen und Größen, und erweitert wurden insbesondere die Vorbemerkungen zu den einzelnen Kapiteln. Dabei wurde versucht, die jeweiligen Hauptgedanken sowie die wichtigsten didaktischen und psychologischen Gesichtspunkte in knapper, aber anschaulicher Form voranzustellen, um so das Verständnis der rein mathematischen Abschnitte vorzubereiten und zu erleichtern.

Ich danke meinem Kollegen E. Hollmann für seine große Hilfe bei den Korrekturen und für zahlreiche Anregungen zur Verbesserung des Textes. Ich danke dem Verlag dafür, daß der Band in diesem Rahmen neu erscheinen kann.

Lüneburg, im August 1996

R. Strehl

Inhalt

| | |
|--|-----|
| <i>Einführung - Zahlen in Umgangssprache und Theorie</i> | 9 |
| <i>I. Natürliche Zahlen</i> | 15 |
| 1. Axiomatische Grundlegung der natürlichen Zahlen | 16 |
| 1.1 Die Axiome | 17 |
| 1.2 Vollständige Induktion | 24 |
| 1.3 Ergänzungen zur Axiomatik der natürlichen Zahlen | 27 |
| 1.4 Das Rechnen mit natürlichen Zahlen | 31 |
| 1.5 Die Anordnung der natürlichen Zahlen | 38 |
| 1.6 Der Rekursionssatz | 45 |
| 1.7 Modelle des Axiomensystems der natürlichen Zahlen | 49 |
| 1.8 Zahlwortreihe und Abzählen von Mengen | 54 |
| 2. Endliche Kardinalzahlen | 58 |
| 2.1 Äquivalente Mengen, Klassenbildung, endliche Mengen | 60 |
| 2.2 Das Rechnen mit Kardinalzahlen | 73 |
| 2.3 Die Anordnung endlicher Kardinalzahlen | 78 |
| 2.4 Die endlichen Kardinalzahlen als Modell der Peano-Axiome .. | 83 |
| 3. Zahlen und Größen | 87 |
| 3.1 Größen als Äquivalenzklassen | 89 |
| 3.2 Die Struktur eines Größenbereichs - minimale Größenbereiche | 95 |
| 3.3 Zahlen als Abstraktionen von Größenbereichen und Operatoren | 98 |
| 4. Didaktische Anmerkungen zu den natürlichen Zahlen | 100 |
| 5. Übungen | 107 |

Inhalt

| | |
|--|-----|
| <i>II. Ganze und rationale Zahlen</i> | 109 |
| 1. Grundgedanken der Zahlbereichserweiterung | 110 |
| 1.1 Subtraktion und Division, Halbgruppe und Gruppe | 110 |
| 1.2 Die Konstruktion neuer Zahlbereiche und das Prinzip der Einbettung | 113 |
| 2. Ganze Zahlen - die Konstruktion von \mathbb{Z} aus \mathbb{N}_0 | 117 |
| 2.1 Die Menge \mathbb{Z} | 117 |
| 2.2 Das Rechnen mit ganzen Zahlen | 119 |
| 2.3 Die Anordnung der ganzen Zahlen | 123 |
| 2.4 Die Einbettung von \mathbb{N}_0 in \mathbb{Z} | 127 |
| 3. Rationale Zahlen - die Konstruktion von \mathbb{Q} aus \mathbb{Z} | 131 |
| 3.1 Die Sonderrolle der Null | 131 |
| 3.2 Die Menge \mathbb{Q} | 131 |
| 3.3 Das Rechnen mit rationalen Zahlen | 135 |
| 3.4 Die Anordnung der rationalen Zahlen | 139 |
| 3.5 Die Einbettung von \mathbb{Z} in \mathbb{Q} | 143 |
| 4. Didaktische Modelle - Bruchzahlen und negative Zahlen | 146 |
| 4.1 Zugänge zur Bruchrechnung | 147 |
| 4.2 Zugänge zum Rechnen mit negativen Zahlen | 150 |
| 4.3 Didaktische Probleme der Zahlbereichserweiterungen | 154 |
| 5. Übungen | 157 |
| | |
| <i>III. Reelle Zahlen</i> | 159 |
| 1. Problemstellung und Grundgedanken einer Erweiterung des Zahlbereichs \mathbb{Q} | 159 |
| 1.1 Die Unvollständigkeit des Körpers \mathbb{Q} und das Prinzip der Intervallschachtelung | 159 |
| 1.2 Das Rechnen mit monotonen Folgen | 165 |
| 2. Die Konstruktion von \mathbb{R} aus \mathbb{Q} | 173 |
| 2.1 Die Menge \mathbb{R} | 173 |
| 2.2 Das Rechnen mit reellen Zahlen | 177 |
| 2.3 Die Anordnung der reellen Zahlen | 184 |

Inhalt

| | |
|--|-----|
| 3. Die Einbettung von \mathbb{Q} in \mathbb{R} - \mathbb{R} als vollständig angeordneter Körper | 188 |
| 4. Andere Begründungen der reellen Zahlen | 195 |
| 5. Die Mächtigkeit der Menge \mathbb{R} | 196 |
| 6. Reelle Zahlen im Unterricht | 201 |
| 7. Übungen | 210 |
| | |
| <i>IV. Komplexe Zahlen</i> | 211 |
| 1. Die Konstruktion von \mathbb{C} aus \mathbb{R} | 211 |
| 2. Die Menge der komplexen Zahlen als algebraisch abgeschlossener und vollständiger Körper - geometrische Deutung | 216 |
| 3. Übungen | 222 |
| | |
| <i>Anhang</i> | |
| Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben | 223 |
| Symbole und Bezeichnungsweisen | 233 |
| Literaturverzeichnis | 234 |
| Register | 237 |

Einführung

ZAHLEN IN UMGANGSSPRACHE UND THEORIE

"Was sind und was sollen die Zahlen?" Unter dieser Frage veröffentlichte Richard Dedekind im Jahre 1888 eine Schrift, mit der er selbst einen entscheidenden Beitrag zur Klärung der mathematischen Grundlagen des Zahlbegriffs leistete. Demgegenüber müssen die mit Zahlen und Rechnen verbundenen psychologischen und didaktischen Fragestellungen immer wieder neu diskutiert werden:

Wie entwickelt sich der Zahlbegriff beim Kinde? Wie kann man die Fähigkeit zu zählen verstehen, die schon bei Vorschulkindern anzutreffen ist? Welcher Zusammenhang mit der Fähigkeit, Mengen in bezug auf die Anzahl ihrer Elemente zu beurteilen, zu vergleichen und zu ordnen, besteht hier? Welche Zusammenhänge mit dem Messen bzw. zwischen Zahlen und Größen sind zu berücksichtigen? Welche Zugänge zum Rechnen in der Grundschule sind je nach der Beantwortung der psychologischen und didaktischen Grundfragen zu bevorzugen? Hat eine Klärung und Festigung der zugrundeliegenden Begriffe Vorrang oder der mehr instrumentelle Gebrauch der Zahlen bei ihrer Anwendung?

Die Diskussion solcher Fragen, die Beurteilung und Einordnung neuer didaktischer und methodischer Vorschläge setzen voraus, daß der Lehrer mit den mathematischen Grundlagen des Zahlbegriffs und dem Aufbau des Zahlensystems vertraut ist. Die Entwicklung des Grundschulrechenunterrichts während der letzten Jahrzehnte und auch der zeitweise heftig geführte Streit um diesen Unterricht zeigen sehr deutlich, wie stark didaktische Entscheidungen von mathematischen wie auch psychologischen Theorien beeinflußt werden können, wie groß aber auch die Gefahren sind, die sich aus einer verengten Theoriebildung ergeben.

Generell hat sich inzwischen die Auffassung durchgesetzt, den Zahlbegriff als komplexen Begriff zu betrachten und bei unterschiedlicher Gewichtung auf eine Integration mehrerer Aspekte hinzuarbeiten. Dies